Bent Hirsberg og Klaus Holth

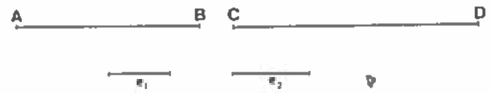
Tal og geometri

Forlaget Trip, 1. udgave, 1. oplag 1982

Kommensurable og inkommensurable størrelser

De tal, pythagoræerne arbejdede med i figurtallene, er hele tal. Deres motto, »alt er tal«, har de sikkert opfattet på den måde, at *alt* kunne beskrives ved hjælp af hele tal eller forhold mellem hele tal. Pythagoræerne opdagede imidlertid, at de på det punkt tog alvorligt fejl. Denne opdagelse fik stor betydning for matematikkens udvikling, og vi vil derfor se nøjere på, hvad det var pythagoræerne opdagede.

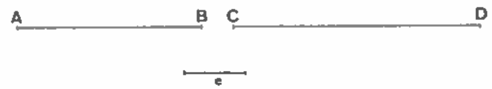
Et liniestykkes længde angives i forhold til en valgt måleenhed. Man finder ud af, hvor mange gange enheden går op i det pågældende liniestykke.



På figuren er vist to liniestykker AB og CD samt to enheder e_1 og e_2. Hvis vi måler begge liniestykker med begge enheder, finder vi, at

AB	=	3	målt med e_1
AB	=	2,4	målt med e_2
CD	=	4	målt med e_1
CD	=	3,2	målt med e_2

Måltallet for et liniestykke afhænger altså af den enhed, vi måler det med.



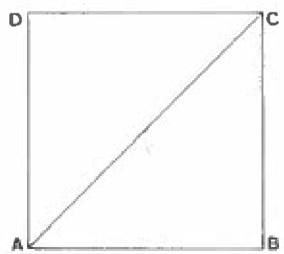
Vil man sammenligne to liniestykkers længde, må man måle dem med samme enhed. I praksis er målenøjagtigheden begrænset, så det vil altid se ud, som om vi kan få måltallene for begge liniestykkerne til at blive hele tal, blot vi vælger enheden tilstrækkeligt lille. Teoretisk forholder det sig helt anderledes. Vi ser på to givne liniestykker AB og CD. Hvis der findes en enhed, der går op i begge liniestykker, findes der to hele tal p og q, således at

$$AB = p \cdot e$$
$$CD = q \cdot e$$

Forholdet mellem de to liniestykkers længder er da det samme som forholdet mellem de hele tal p og q. Analysen viser altså, at hvis de to liniestykker kan måles med samme enhed, så er forholdet mellem deres længder et rationalt tal. Man siger, at de to liniestykker er kommensurable. Ordet *kommensurabel* er af latinsk oprindelse og betyder direkte oversat sammenmålelig.

De tidlige pythagoræere tog det for givet, at alle liniestykker er kommensurable. Engang i det 5. århundrede opdagede de imidlertid, at der findes par af liniestykker, som ikke kan måles med samme enhed. Sådanne liniestykker siges at være *inkommensurable*. Visse antikke forfattere hævder, at det var Pythagoras selv, der gjorde opdagelsen. Dette er dog yderst tvivlsomt, og det vides ikke, hvem der gjorde opdagelsen, og hvilke liniestykker der blev undersøgt. En rimelig mulighed er, at det er siden og diagonalen i et kvadrat, man har undersøgt.

SÆTNING 2.1 I et kvadrat er diagonal og side inkommensurable.



Vor tidligste kilde til denne sætning er Aristoteles (384-322), der i Analytica Priora [3, s. 310-311] skriver, at man beviser en påstand indirekte:

> »... når noget umuligt følger af en modstridende antagelse, som f.eks. når diagonalen er inkommensurabel, fordi ulige tal er lig med lige tal. Det vises..., at ulige tal er lig med lige og vises hypotetisk, at diagonalen er inkommensurabel, siden en falsk slutning følger af den modsatte antagelse«.

Et egentligt bevis for sætningen findes i Euklids Bog 10, Sætning 117. Der hersker dog i dag almindelig enighed om, at denne sætning er en interpolation, d.v.s. en senere tilføjelse, som ikke er gjort af Euklid selv. Hovedtrækkene i beviset er:

AC er diagonalen, AB er siden. Antag, at $AC/AB = p/q$, hvor p/q er en *uforkortelig* brøk. Der gælder derfor også, at $AC^2/AB^2 = p^2/q^2$.

Trekant ABC er retvinklet, så $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Endvidere er $AB = BC$, så $AB^2 = BC^2$. Om p og q gælder derfor, at

$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{2AB^2}{AB^2} = 2$$

og dermed er

$$p^2 = 2q^2$$

Heraf kan man se, at p^2 er et lige tal. Derfor er også p et lige tal, og vi kan skrive $p = 2n$, hvor n er et helt tal. Der vil derfor gælde, at

$$2q^2 = (2n)^2 = 4n^2$$

eller

$$q^2 = 2n^2$$

q^2 må derfor være lige, hvorfor q er et lige tal. Både p og q er altså lige tal, og p/q kan derfor forkortes med 2. Men dette strider mod forudsætningen om, at p/q er uforkortelig. AC og AB kan altså ikke være kommensurable.

Opdagelsen af inkommensurable liniestykker var et alvorligt slag for pythagoræerne. Den viste, at deres tro på, at alt kan henføres til forhold mellem hele tal, var forkert.

At diagonal og side i et kvadrat er inkommensurable, viser os også, at den simple andengradsligning

$$x^2 = 2$$

ikke kan løses indenfor de rationale tal. Inkommensurabiliteten har derfor konsekvenser for både aritmetikken og geometrien og for samspillet mellem disse. Indenfor geometrien betød opdagelsen, at dens grundlag måtte undersøges nærmere. Endvidere førte opdagelsen til, at nye, matematiske discipliner udvikledes. En af disse var den såkaldte geometriske algebra, hvori aritmetikken og geometrien igen kunne forenes.

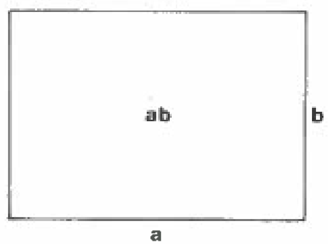
3. Geometrisk algebra

Opdagelsen af inkommensurable størrelser førte til udvikling af nye matematiske emner. Et af disse var, hvad vi i dag kalder den geometriske algebra. I denne formuleres i et geometrisk sprog mange af de regler og resultater, vi kender fra aritmetikken.

Euklids 2. Bog er bygget op omkring ideerne i den geometriske algebra. Hos Euklid er der ligesom i moderne matematik gjort brug af symboler og abstrakte begreber. Et centralt begreb i Elementerne er *størrelse*. Hvad Euklid egentlig mener med dette begreb, er ikke helt klart. Formodentligt skal ordet størrelse betegne et hvilket som helst meningsfuldt, matematisk objekt, såsom tal, liniestykke, rektangel o.s.v. Vi vil i det følgende se på de grundliggende ideer i den geometriske algebra. Størrelser angives med bogstaver.

Euklid bruger visse regler for regning med størrelser. Er f.eks. a og b to liniestykker fastlægges betydningen af a + b således

Tænker vi på a og b som to tal, er a + b altså summen af a og b. Svarende til multiplikation fastlægges betydningen af ab som et rektangel med siderne a og b

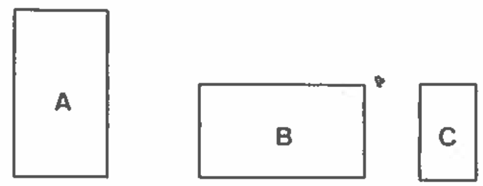


Opfatter vi igen a og b som tal, er ab rektanglets areal. I det følgende vil vi imidlertid ikke tænke på a og b som tal, men i stedet lade dem være liniestykker. Grunden til dette er, at en teori, hvor man regner med liniestykker, er mere generel end en teori, hvor man regner med rationale tal. Og dette skyldes, at der så at sige findes flere liniestykker, end der findes rationale tal.

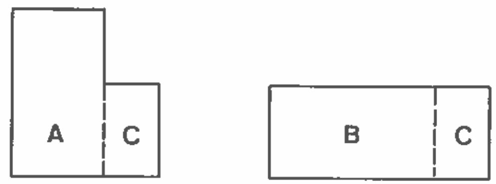
For at kunne sammenligne størrelser benytter Euklid følgende regler:

1. Størrelser, som er lige store med samme tredie, er indbyrdes lige store.
2. Når lige store størrelser lægges til lige store størrelser, er summerne lige store.
3. Når lige store størrelser trækkes fra lige store størrelser, er resterne lige store.
4. Størrelser, der kan dække hinanden, er indbyrdes lige store.

Regel 2 er tilsyneladende indlysende. Hvis man anvender den på tal, betyder den f.eks., at når $2 = 2$ og $3 = 3$, så er $2 + 3 = 2 + 3$. Men reglen bruges også i en videre betydning. Nedenfor er vist tre rektangler A, B og C. A og B er lige store.



Hvis vi lægger C til A og til B som vist nedenfor, får vi to størrelser, som ifølge Euklid også er lige store.



De to figurer kan ikke dække hinanden, så ligestorhed er altså ikke det samme som kongruens. I moderne, matematisk sprogbrug vil vi sige, at de to figurer er lige store, fordi de har samme areal.

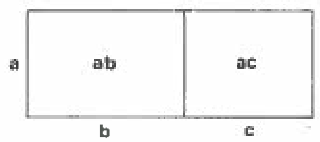
• • •

For at give et indtryk af, hvorledes ovenstående regler anvendes i den geometriske algebra, anfører vi en række sætninger, hvis indhold er velkendt, når man tænker på størrelser som tal.

SÆTNING 3.1 Lad a og b være to størrelser. Da er

$$a(b + c) = ab + ac$$

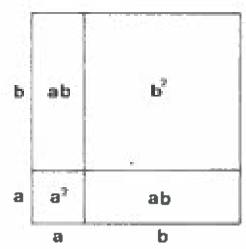
Sætningens rigtighed fremgår af nedenstående figur, idet vi bemærker, at rektanglerne ab og ac tilsammen kan dække rektanglet a(b + c). Sætning 3.1 er den første sætning i Euklids 2. Bog.



SÆTNING 3.2 Lad a og b være to størrelser. Da er

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Sætningens rigtighed fremgår af nedenstående figur.



Hos Euklid (Bog 2, Sætning 4) lyder sætningen:

»Når en ret linie er delt vilkårligt, er kvadratet på hele linien lig med summen af kvadraterne på stykkerne og to gange det rektangel, der indesluttes af stykkerne«.

Sætning 3.2 indeholder sætningen om kvadratet på en toleddet størrelse. Sædvanligvis viser man denne sætning ved at udregne $(a + b)^2$:

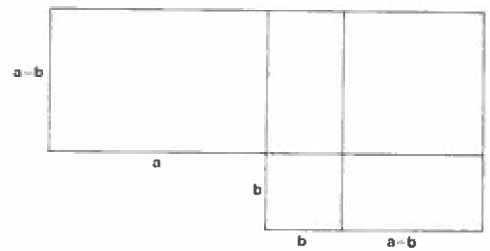
$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)\cdot(a + b)\\ &= a(a + b) + b(a + b)\\ &= a^2 + ab + ba + b^2\\ &= a^2 + b^2 + 2ab\end{aligned}$$

Når Euklid formulerer sætningen geometrisk, er det fordi sætningens indhold herved bliver mere generelt. Dette hænger sammen med, at vi til ethvert rationalt tal p/q kan finde et liniestykke, der har længden p/q. Men da vi ikke omvendt til ethvert liniestykke kan finde et rationalt tal s/t, således at liniestykket har længden s/t, gælder sætningen altså også for størrelser, der ikke er rationale tal.

SÆTNING 3.3 Lad a og b være to størrelser. Da er

$$(a - b)(a + b) + b^2 = a^2$$

Betragter vi igen de indgående led i formlen som rektangler og kvadrater, indses sætningens rigtighed ved betragtning af nedenstående figur.

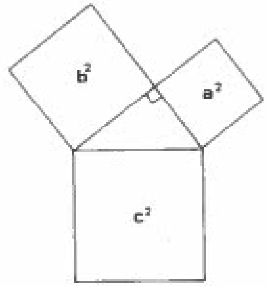


Hos Euklid (Bog 2, Sætning 5) formuleres sætningen således:

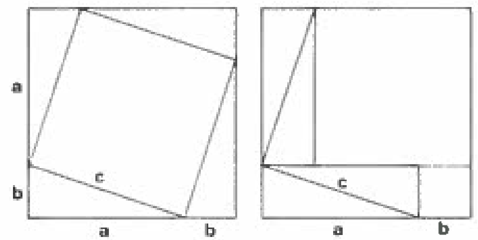
»Når en ret linie er delt i lige store og i ulige store stykker, er det rektangel, der indesluttes af hele liniens ulige store stykker samt kvadratet på stykket mellem delepunkterne lig kvadratet på halvdelen«.

Hele liniens ulige stykker er a − b og a + b, og halvdelen er derfor a. Sætning 3.3 indeholder den velkendte sætning om »differensen mellem to tals kvadrater«.

Den pythagoræiske læresætning står ikke i Euklids 2. Bog, som man måske kunne have forventet. Som vi skal se, er den ganske enkel at bevise ud fra den geometriske algebras grundprincipper. Euklids bevis (Bog 1, Sætning 47) er ret indviklet, og det lægger op til en mere generel sætning om vilkårlige trekanter. Beviset bygger i øvrigt på en undersøgelse af nedenstående figur, som også antyder, hvordan læresætningen kan fortolkes geometrisk.



SÆTNING 3.4 I en retvinklet trekant er kvadratet på hypotenusen lig med summen af kvadraterne på kateterne.



På figuren ovenfor er vist to lige store kvadrater med siden a + b. Med figurens betegnelser er

$$c^2 + 4 \cdot \tfrac{1}{2}(ab) = a^2 + b^2 + 2ab$$

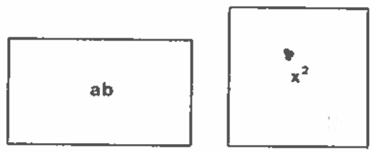
Trækker vi to gange rektanglet ab fra på begge sider, får vi, at

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Fladeanlæg

Når vi skal angive arealet af en trekant, en firkant, en cirkel o.s.v., siger vi f.eks. at trekanten har arealet 28 cm², at firkanten har arealet 18 m², eller at cirklen har arealet 200 m². Vi beskriver med andre ord arealet ved hjælp af et tal. Denne mulighed var grækerne afskåret fra på grund af deres talsystems ufuldstændighed. De brugte derfor en anden metode. Når grækerne skulle angive størrelsen af en given figur, konstruerede de et kvadrat, der var lige så stort som figuren. Denne teknik, som kaldes *fladeanlæg*, vil vi se nærmere på i det følgende.

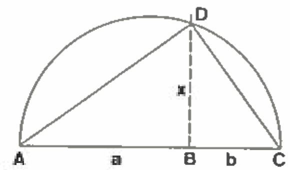
Det første problem består i at konstruere et kvadrat med samme størrelse som et givet rektangel med siderne a og b.



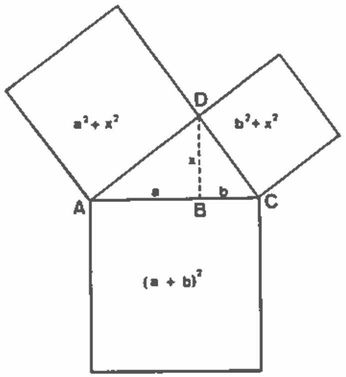
Kalder vi siderne i rektanglet a og b og siden i kvadratet x, skal der altså gælde, at

$$x^2 = ab$$

For at finde x anvises følgende konstruktion. Man afsætter de to liniestykker a og b i forlængelse af hinanden og konstruerer dernæst en halvcirkel med a + b som diameter.



I B oprejses den vinkelrette, som skærer halvcirklen i D. Forbindes A og C med D, fremkommer den retvinklede trekant ADC.



På figuren ovenfor er den pythagoræiske læresætning anvendt på trekant ADC samt på trekanterne ABD og DBC. Vi finder, at

$$(a^2 + x^2) + (b^2 + x^2) = (a + b)^2$$

hvilket ifølge Sætning 3.2 kan omskrives til

$$a^2 + x^2 + b^2 + x^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

og dermed er

$$x^2 = ab$$

x^2 er da det søgte kvadrat. Euklid fører et andet bevis for konstruktionens rigtighed.

At finde et kvadrat, som er lige så stort som en given figur, kaldes at *kvadrere* den pågældende figur. Ovenfor har vi således kvadreret et rektangel.

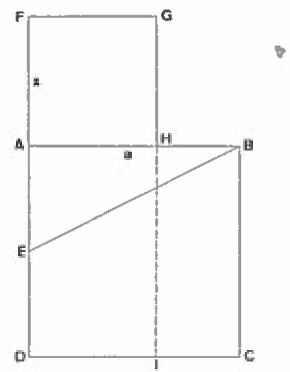
Når man kan kvadrere et rektangel, er det ikke svært at kvadrere en retvinklet trekant, hvilket igen kan bruges til at kvadrere en vilkårlig trekant. Fremgangsmåden er den, at en vilkårlig trekant ved hjælp af en højde, kan opdeles i to retvinklede trekanter, der hver især kan kvadreres. Kaldes de to herved fremkomne kvadrater for x^2 og y^2, findes der ifølge den pythagoræiske læresætning et kvadrat z^2, således at $z^2 = x^2 + y^2$.

Kvadrering af en vilkårlig polygon foregår ved triangulering, d.v.s. ved opdeling af polygonen i trekanter. Med denne teknik er det således muligt at kvadrere en figur, der er begrænset af rette linier.

Konstruktionen af kvadratet x^2 kan tolkes som en geometrisk måde at løse andengradsligningen $x^2 = ab$ på. Identificerer vi igen størrelserne med rationale tal, ser vi, at selv om a og b er rationale tal, så behøver x ikke nødvendigvis at være det. Men konstruktionen viser, at man altid kan løse ligningen geometrisk. At grækerne også kunne løse mere komplicerede andengradsligninger, er nedenstående et eksempel på. Vi skal her finde en løsning til ligningen

$$x^2 + ax = a^2$$

Vi kan tolke opgaven således: Konstruer ud fra et givet liniestykke a et liniestykke x, således at kvadratet x^2 og rektanglet ax tilsammen er lige så store som kvadratet a^2. I Euklids Elementer (Bog 2, Sætning 11) anvises følgende konstruktion:



På liniestykket AB (a) konstrueres et kvadrat ABCD (a^2). AD halveres i punktet E, og liniestykket EB tegnes. Dernæst afsættes et liniestykke med samme længde som EB ud ad EA til F. På AB afsættes endeligt kvadratet AFGH (x^2) og rektanglet AHID (ax). Påstanden er nu, at kvadratet og rektanglet tilsammen er lig kvadratet ABCD.

Da trekant EAB er retvinklet og EB = EF, følger det af den pythagoræiske læresætning (Sætning 3.4), at

$$(x + \frac{1}{2}a)^2 - (\frac{1}{2}a)^2 = a^2$$

Af Sætning 3.3 følger nu, at differensen mellem disse to kvadrater er lig med rektanglet $(x+a)x$, d.v.s.

$$x^2 + ax = a^2$$

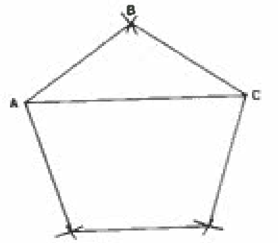
AH = x er således det søgte liniestykke. Om H's deling af AB skiver Euklid:

»At dele en given ret linie således, at det rektangel, der indesluttes af hele linien og det ene af stykkerne, er lig kvadratet på det andet stykke«.

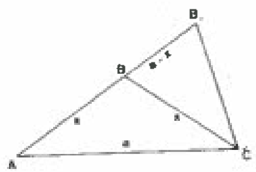
Delingen af AB i AH og HB kaldes det *gyldne snit*. Konstruktionen har haft stor betydning for både græsk og senere europæisk kunst og arkitektur. En af årsagerne til dette er, at et rektangel med siderne AH og HB af de fleste opfattes som mere harmonisk end mere aflange eller mere sammentrykkede rektangler.

Konstruktionen af den regulære femkant

En regulær femkant kan konstrueres, når man kender siden og diagonalen. På figuren nedenfor er konstruktionen antydet.



Når man skal udføre konstruktionen, er udgangspunktet imidlertid, at man kender enten siden eller diagonalen og derfor først må konstruere det manglende liniestykke. Det interessante er nu, at andengradsligningen $x^2 + ax = a^2$ er nøje forbundet med dette problem. Analysen nedenfor viser hvordan. Vi forestiller os, at vi kender diagonalen a i en regulær femkant. Vi skal altså konstruere siden x.



Betragt trekant ABC i femkanten. Ud ad AB's forlængelse afsættes B_1, så $AB_1 = AC = a$. Så er $BB_1 = a - x$, og trekanterne AB_1C og CB_1B er ligebenede og ensvinklede. Fra den elementære geometri ved vi, at i ensvinklede trekanter er forholdet mellem ensliggende sider konstant, d.v.s.

$$\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{BB_1}{B_1C}$$

eller

$$\frac{x}{a} = \frac{a-x}{x}$$

Denne ligning mellem sideforholdene kan omformes til

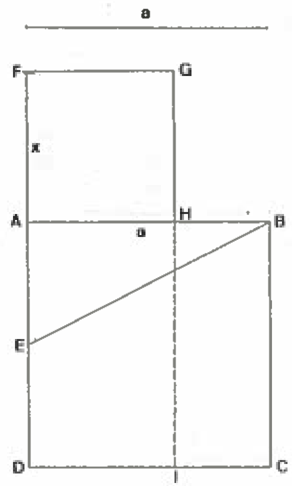
$$x^2 = a(a - x)$$

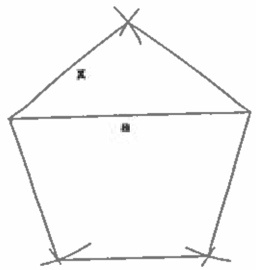
eller

$$x^2 + ax = a^2$$

Denne ligning er identisk med den, vi løste ovenfor, og hvor vi netop fik anvist, hvorledes x kan konstrueres.

Når vi derfor skal konstruere en regulær femkant med et givet liniestykke a som diagonal, udføres konstruktionen ved, at vi først konstruerer det liniestykke, der skal være side i den regulære femkant, og dernæst konstruerer selve femkanten. Nedenfor er vist hvordan.





Opfatter vi x og a som tal, kan vi finde forholdet $\frac{x}{a}$ ved at løse ligningen

$$x^2 + ax = a^2$$

som omformes til

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

Af løsningsformlen for en andengradsligning får vi

$$x = \frac{-a + \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot a$$

Forholdet mellem side og diagonal i en regulær femkant er da

$$\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Sideforholdet er således et irrationalt tal — d.v.s. side og diagonal i en regulær femkant er inkommensurable størrelser.

Når konstruktionen af den regulære femkant tilsyneladende ikke voldte større kvaler, var det, fordi vi undlod at komme nærmere ind på størrelsesforholdet mellem side og diagonal. Analysen byggede på sætningen om sideforholdet i ensvinklede trekanter. Denne sætnings rigtighed er ikke umiddelbart indlysende netop på grund af, at liniestykker kan være inkommensurable. Omformningen af

$$\frac{x}{a} = \frac{a - x}{x}$$

til

$$x^2 = a(a - x)$$

er heller ikke uproblematisk. Disse vanskeligheder vil blive berørt i næste kapitel.