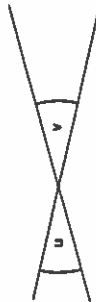


5. Matematikkens videnskabeliggørelse

De mange matematiske resultater, man fandt frem til i det 5. og 4. århundrede, var ikke alle lige godt logisk underbygget og heller ikke alle lige indlysende. F.eks. synes det rimeligt, at topvinkler er lige store



og det er heller ikke særligt svært at give et bevis for påstanden $u = v$. Derimod er det ikke umiddelbart indlysende, at man ikke kan finde et fælles mål for f.eks. siden og diagonalen i et kvadrat.

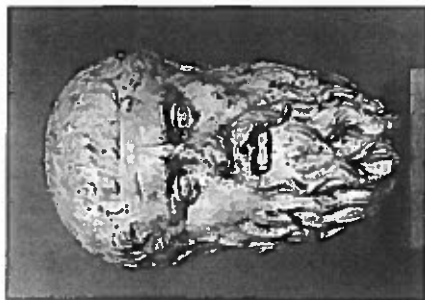
For at afgøre om en matematisk påstand er sand eller falsk, er det åbentbart ikke nok blot at se på en tegning og så afgøre, om påstanden ser rimelig ud. Man kan med andre ord ikke stole på sanseerfaringerne i matematikken. Men hvilke kriterier skal man så rette sig efter? For at forstå, hvordan matematikerne klarede dette problem, må vi for en stund vende os mod den udvikling, der fandt sted i den samtidige, græske filosofi.

Thales og hans efterfølgere havde især interesseret sig for at forklare naturfænomenerne. I det 5. og 4. århundrede var filosofierne mere optaget af, hvordan samfundet burde indrettes, og hvordan det enkelte menneske burde leve. Umiddelbart kunne man tro, at en sådan indstilling ville føre med sig, at filosofierne ikke længere bekymrede sig om matematikken, men dette er ingeniunde tilfældet.

Platon

Den vigtigste repræsentant for den »politiske-etiske« filosofi er Platon (427-347). Platon fødtes og levede det meste af sit liv i Athen, hvor han oprettede en skole, »Akademiet«, i 385. Her samlede han mange af tidens betydeligste filosoffer og matematikere, og Akademiet har givet os meget meget gavnligt for matematikkens udvikling, fordi matematikerne her havde rige muligheder for at diskutere og analysere deres teorier. For at forstå, hvorfor Platon tillagde studiet af matematik så stor betydning, må vi se på hans tanker om den ideelle stat og på hans erkendelsesteori. Gennemgangen heraf må nødvendigvis blive meget kortfattet og forenklet.

Ligesom sin læremester, Sokrates, mente Platon, at hvis menneskene havde kendskab til, hvad der er sandt, og ikke lod sig forlede af, hvordan tingene tilsyneladende ser ud, så ville de også handle retfærdigt og godt. Staten burde derfor ledes af mænd med dyb indsigt i tingenes sande sammenhæng, d.v.s. af filosofierne. Men hvordan skulle man opnå sand erkendelse af virkeligheden? Tænker vi nøjere over, hvordan vi bruger selv de mest almindelige ord for ting og begreber, vil vi bemærke, at deres anvendelse ikke er entydig. Hvis vi f.eks. bruger ordet hest, kan det være en hvid hest, en rød hest, en arbejdshest, en væddeløbshest, en halt hest, vi tænker på. Alle disse heste er forskellige, og dog er vi ikke i tvivl om, at de er heste og ikke køer, træer eller sagførersalærer. Når de, deres forskellighed til trods, alligevel genkendes som heste, må det ifølge Platon skyldes, at de alle er repræsentanter for hestens ide, at de alle er mere eller mindre forvanskede fremtrædelsesformer for hestens ide.



Platon.

Bag iagttagelsernes mangfoldighed og foranderlighed skjuler der sig altså en uforanderlig verden af ideer, og det er erkendelsen af denne ideverden, filosofien bør søge at opnå. Filosofien skal jo netop søge sandheden, men dersom det skal have nogen mening at tale om sandhed, må man forlange, at sandheden skal være evig og uforanderlig. Den sandhedssøgende bør derfor se bag fænomenernes kaos og koncentrere sig om ideernes verden.

Til dette formål var studiet af matematikken — stadig ifølge Platon — til stor hjælp. Til matematikkens begreber svarer ganske vist grove efterligninger i den sandelige verden; f.eks. svarer de cirkler, man kan tegne i sandet, til cirkelns ide. Men når man udleder en matematisk sætning, er sådanne tegninger kun pædagogiske hjælpemidler, mens det virkelige bevis føres ved hjælp af fornufts slutninger om ideerne. Ved at studere matematik vænnede filosofierne sig derfor til at koncentrere sig om den virkelige verden, nemlig ideernes. Formålet med matematikstudiet var derfor ikke at sætte eleverne i stand til at udføre forskellige tekniske, videnskabelige eller administrative opgaver. Om studiet af aritmetikken skriver Platon således i sit centrale værk »Staten« [2. s. 278]:

»Det vil altså være rigtigt... at slå denne kundskab fast ved lov og at søge at bevæge dem, der skal have del i de højeste hverv i staten, til at lægge sig efter regnekunst og beskæftige sig med den, ikke på diletantisk vis, men så længe, indtil de når til at betragte tallenes natur med sel-

Bent Hirsberg og Klaus Holth
Forlaget TTP, 1. udgave, 1. oplag 1982

ve tanken, ikke således, at de øver sig i kunsten af hensyn til køb eller salg ligesom købmænd eller kræmmere, men af hensyn til krigen og for at gøre det let for selve sjælen at vende sig om fra det, der bliver til, til sandhed og virkelighed».

Platon mente dog ikke, at indsigt i aritmetik og geometri var virkelig indsigt. Matematikerne argumenterede ganske vist logisk korrekt, men de startede altid med nogle ubeviste forudsætninger (hypoteser). Dette er Platon utilfreds med [12, s. 288]:

»...de øvrige derimod, hvorom vi sagde, at de til en vis grad røre ved virkeligheden, geometri,...., om dem ser vi, at de kun drømmer om virkeligheden, men det er umuligt for dem at se med åbne øjne, så længe de benytter sig af forudsætninger, som de lader stå urokkede uden at være i stand til at begrunde dem. For den, der til udgangspunkt har noget, som han ikke ved, og for hvem slutpunktet og de mellemiggende trin er knyttede sammen ved hjælp af noget, som han ikke ved, — hvilken mulighed er der for, at en sådan sammenhæng nogensinde kan blive til virkeligheden for ham?«.

Når Platon kunne argumentere sådan, må det selvsagt skyldes, at matematikken allerede havde nået en vis grad af logisk sammenhæng på hans tid. At dette er tilfældet, kan vi se ud af en af Platons dialoger, Theaitetos. Her lader Platon sofisten Protagoras sige [13, s. 127]:

»Som om I dermed gav det fjerneste bevis eller tvingende slutning; det er jo blot noget, som ser bestikkende ud; hvis f.eks. Theodoros eller en anden matematiker ville anvende den slags talemåder i deres matematiske beviser, ville han ikke være en døjt værd!«.

Sofisterne er betegnelsen for en gruppe filosoffer, der mod betaling underviste i retorik, moral og naturvidenskab. De præsterede ikke væsentlige selvstændige forskningsresultater, men nogle af dem har gennem deres undervisning højnet den almindelige forståelse af visse videnskabelige emner.

Platons betydning for matematikkens udvikling er stadig meget omdiskuteret. Man kan med rimelighed fastslå, at han ikke har ydet væsentlige bidrag til matematikken i streng faglig forstand. Han har imidlertid virket meget inspirerende for sin tids matematikere. For det første nødvendiggjorde hans filosofiske standpunkt en skærpsæelse af de matematiske begreber og af bevisførelsen. Og for det andet skabte han de fysiske rammer om et frugtbart forskningsmiljø. Mange af de vigtigste, græske matematikere inden Euklid arbejdede således ved Platons akademi. Det var f.eks. her

Eudoxos udarbejdede sin løsning på problemet med de inkommensurable størrelser. Det er muligvis også Platon, som har indført kravet om, at man kun må bruge passer og lineal i konstruktioner. Hvis dette virkelig er tilfældet, skyldes det ikke, at passeren og linealen er særligt enkle hjælpemidler, men snarere, at linien og cirklen har »pænere« symmetriegenskaber end andre figurer, man kan tegne med mekaniske hjælpemidler.

Aristoteles

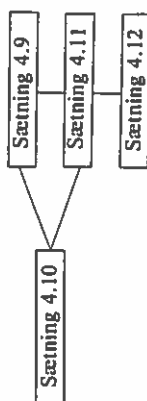
Mens der altså hersker nogen tvivl om omfanget af Platons indsats for matematikken, er hans elev og kritiker Aristoteles' betydning veldokumenteret. Aristoteles blev født i Nordgrækenland i 384. I 17-18 års alderen kom han til Athen, hvor han var elev på Platons Akademi til dennes død i 347. En halv snes år senere oprettede Aristoteles sin egen skole, Lykeion, også i Athen. Her organiserede han et omfattende forskningsarbejde i mange forskellige videnskaber. Aristoteles selv var utroligt produktiv og alsidig både som videnskabsmand og filosof, og meget af vor viden om den tidligste, græske filosofi skyldes vi Aristoteles og hans elevs indsamlingsarbejde. Men lad os her koncentrere os om hans indsats indenfor matematikken.



Aristoteles.

Aristoteles ydede ligesom Platon ikke bidrag til matematikken ved at bevise nye sætninger, men derimod ved at afklare dens logiske opbygning i en form, den stort set har bevaret til i dag. Aristoteles' afdækning af matematikkens opbygning kan vi lettest forstå ved at se på et konkret eksempel.

På side 47 beviste vi, at i to ensvinklede trekanten er forholdet mellem ensliggende sider det samme. (Sætning 4.12). For at føre et korrekt bevis for denne påstand benyttede vi os af en anden sætning: Når en ret linie trækkes parallelt med en af siderne i en trekant, så vil den dele trekantens sider proportionalt (Sætning 4.11). Sætning 4.11 byggede igen på andre, tidligere beviste sætninger o.s.v. Denne situation er typisk for opbygningen af matematiske beviser. I beviset for en ny påstand benytter man tidligere beviste sætninger. Man kan fremstille denne struktur skematisk. Som eksempel kan vi se på, hvordan sætningerne 4.9-4.12, s. 46-47 hænger sammen:



Denne systematiske opbygning garanterer, at hvis de sætninger, der benyttes i beviset for en ny sætning, er sande, så er den ny sætning også sand. Forudsætningerne er sande, fordi de sætninger, de bygger på, er sande o.s.v. Denne »tilbageføringsproces« må imidlertid standse, hvis vi vil tillægge vores matematiske erkendelse nogen sandhedsværdi. Vi kan belyse dette med endnu et eksempel. For at bevise Sætning 4.10 (som siger, at trekanter under samme højde forholder sig til hinanden som grundlinjerne) måtte vi benytte Sætning 4.9. Vi brugte imidlertid også definitionen på, hvad det vil sige, at to forhold er ens:



Definitionen danner grundlag for regning med forhold, fordi den præcist siger, hvornår to forhold er ens. Da vi indførte den, brugte vi meget plads på at argumentere for, at den var rimelig. Men der er ikke tale om, at vi gav noget bevis for definitionen. Vi kan altså fastslå at

- alle matematiske påstande bygger i sidste instans på definitioner.
- definitioner kan ikke bevises, d.v.s. vi ved ikke, om de er sande.

Det er utilfredshed med denne tilstand, der får Platon til at sige, at matematikere kun drømmer om virkeligheden.

Aristoteles løste, eller måske snarere bortforklarede, problemet med definitionernes tilsyneladende vilkårlighed ved at hævde, at definitionerne er påstande, som ikke kan bevises, men som vi ved er sande. Aristoteles foretog i øvrigt en meget grundig analyse af den korrekte, logiske opbygning af det matematiske bevis. Hvordan denne opbygning tog sig ud i praksis, skal vi se nærmere på i næste afsnit.

Euklid

I det 5. og 4. århundrede foregik den væsentligste, matematiske forskning i Athen. Dette skyldes, at Athen efter grækernes sejr i Perserkrigene havde opnået en politisk og militær førerstilling blandt de græske bystater. Denne position resulterede i en voldsom, kulturel opblomstring i byen. Fra hele de græske verden kom der kunstnere, filosoffer og matematikere til Athen, hvor de f.eks. virkede ved Platons Akademi. Athen mistede sit politiske herredømme efter nederlaget til Sparta i den peloponnesiske krig i begyndelsen af det 4. århundrede, men var stadig grækernes kulturelle centrum.

I slutningen af det 4. århundrede mistede byen imidlertid også sin position på dette område. Tyngdepunktet for den græske kunst og videnskab flyttedes til Alexandria, som var blevet grundlagt i 332 af Alexander den Store under hans erobringstog. Den periode, hellenismen, som indledtes med de græske staters sammenbrud og oprettelsen af Alexanderriget, betragtes ofte som en nedgangstid for den græske kultur. Hvis man udelukkende ser på udviklingen indenfor kunsten og filosofien, kan der være en vis rimelighed i denne betragtning. Men hvis man ser på de naturvidenskabelige fremskridt, er billedet et helt andet. Især inden for astronomien og matematikken opnåede man resultater, som langt overgik dem, der var blevet frembragt i de forrige århundreder. Det, som vi her skal se på, er imidlertid ikke den avancerede del af matematikken, men den endelige systematisering og videnskabeliggørelse af dens grundlag, som blev foretaget af Euklid omkring år 300 i Alexandria.

Skønt Euklid er en helt central skikkelse i matematikkens historie, er det meget lidt man ved om hans liv. Man ved f.eks. ikke, hvor og hvornår han blev født. Euklid har nok i højere grad virket som lærer end som forsker ved »universitetet« i Alexandria. Hans berømmelse skyldes ikke så meget de sætninger, han selv har bevist, som hans arbejde med at samle den allerede kendte, elementære matematik i et sammenhængende og logisk korrekt system. Dette arbejde er bevaret for eftertiden i 13 bøger, som tilsammen kaldes »Elementerne«. En af de få oplysninger, vi har om Euklid, er en anekdote [14, s. 436-437]:

»En, som var begyndt at læse geometri hos Euklid, spurgte, da han havde lært den første sætning, Euklid: »Men hvilken fordel har jeg af at lære disse ting?«. Euklid kaldte på sin slave og sagde: »Giv ham tre skilling, siden han absolut skal tjene penge på det, han lærer.«

Selv om historien sikkert ikke er sand, fortæller den noget om, hvordan grækerne selv bedømte matematikkens betydning. Euklid følger stort set Aristoteles i dennes syn på, hvordan videnskaberne bør opbygges. Han går således ud fra nogle påstande, som ikke kan bevises, men som må anses for at være sande. Disse grundlæggende

påstande er delt op i tre grupper: almindelige begreber, forudsætninger og definitioner.

Almindelige begreber er påstande, som ikke bare er gyldige for geometrien, men for alle videnskaber. Et almindeligt begreb er f.eks.:

»Størrelser, som er lige store med den samme størrelse, er indbyrdes lige store«.

Forudsætninger er påstande, som kun har mening inden for geometrien. En forudsætning er f.eks.:

»At man kan trække en linie fra et hvilket som helst punkt til et hvilket som helst andet punkt«.

»At man kan tegne en cirkel med et hvilket som helst centrum og en hvilken som helst radius«.

En *definition* er med Aristoteles ord »et udsagn om, hvad en ting er«. Det er klart, at denne formulering er ret problematisk, men lad os lade filosofien hvile her og i stedet ved hjælp af nogle eksempler se på, hvad Euklid kalder definitioner:

»Et punkt er det, der ikke kan deles«.

»En linie er en længde uden bredde«.

»En linies begrænsninger er punkter«.

»En ret linie er en linie, som ligger mellem punkterne på den«.

»En cirkel er en plan figur, indesluttet af en sådan linie (som kaldes periferien), at alle de rette linier, der kan trækkes ud til den fra et inden for figuren liggende punkt er indbyrdes lige store«.

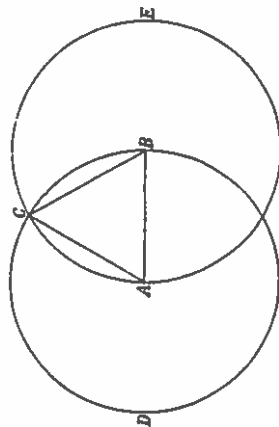
»Dette punkt kaldes centrum i cirklen«.

Ved hjælp af sine definitioner, forudsætninger og almindelige begreber opbygger Euklid nu geometrien.

Ovenstående gengivelse af Thyra Eibes oversættelse af Euklids Elementer viser, hvor elegant de gjorde forudsætninger udnyttede i bevisførelsen.

1.

At konstruere en ligesidet Trekant paa en given begrænset ret Linie.



Lad AB være den givne begrænsede rette Linie. Man skal da konstruere en ligesidet Trekant paa den rette Linie AB.

Lad Cirkel BCD være tegnet med A som Centrum og AB som Radius og tillige Cirkel ACE med B som Centrum og BA som Radius, og lad de rette Linier CA og CB være dragne fra Cirklernes Skæringspunkt C til Punkterne A og B.

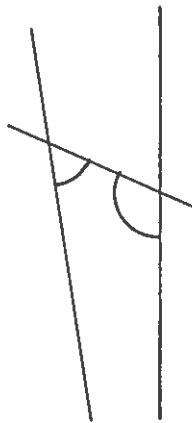
Da nu Punkt A er Centrum i Cirkel CDB, er $AC = AB$. Da endvidere Punkt B er Centrum i Cirkel CAE, er $BC = BA$. Men det blev ogsaa bevist, at CA er lig AB. Altsaa er baade CA og CB lig AB. Men Størrelser, der ere ligestore med den samme Størrelse, ere indbyrdes ligestore. Altsaa er $CA = CB$. Altsaa ere de tre rette Linier CA, AB og BC indbyrdes ligestore.

Altsaa er $\triangle ABC$ ligesidet, og den er konstrueret paa den givne begrænsede rette Linie AB; hvilket skulde gøres.

Euklids Elementer har været brugt som lærebog i matematik til for mindre end hundrede år siden. Den er på en måde ikke særligt velegnet til dette formål, fordi den i sin afpudsede form skjuler de væsentlige elementer i frembringelsen af matematisk viden, nemlig fantasi og intuition. Den systematiske, logiske opbygning af resultaterne er ganske vist nødvendig, men logikken siger intet om, hvordan man kommer videre fra allerede kendte sætninger til dybere sammenhænge. Den omstændelige bevisførelse er imidlertid nødvendig for at sikre resultaternes holdbarhed, og Euklids metode anvendes den dag i dag med få modifikationer i matematisk litteratur. Trods Euklids omhu er hans system ikke frit for logiske mangler og skjulte antagelser, men når man udbedrer disse fejl, fremtræder det som et solidt fundament for matematikken.

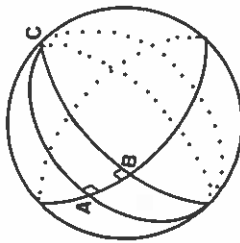
På ét væsentligt punkt har moderne matematikere en anden opfattelse end deres antikke kolleger. Det drejer sig om definitionernes status. Aristoteles og Euklid mente, at definitioner er påstande, som er sande, men som ikke kan bevises. Det er imidlertid problematisk, hvad det egentligt vil sige, at en matematisk påstand er sand. Vi kan belyse dette med et konkret eksempel. I Euklids 5. forudsætning hedder det:

»Når en ret linie skærer to rette linier, og de indvendige vinkler på samme side er mindre end to rette, så mødes de to linier, når de forlænges ubegrænset, på den side, hvor de to vinkler, der er mindre end to rette, ligger«.



Denne forudsætning er helt nødvendig for opbygningen af Euklids geometri. Bl.a. skal man bruge den for at vise, at vinkelsummen i en trekant er 180° . Denne sidste påstand kan man tilsyneladende efterprøve i praksis ved at tegne en vilkårlig trekant og finde vinkelsummen ved hjælp af en vinkelmåler. Ligeledes kan man ved en overfladisk betragtning sige, at Euklids geometri viser sin rigtighed ved, at man rent faktisk kan benytte sætningen om ensvinklede trekanters lighed til at foretage korrekte afstandsbestemmelser. Euklids geometri stemmer så at sige overens med den fysiske virkelighed og almindelig, sund fornuft.

Der findes imidlertid situationer, hvor Euklids geometri ikke kan anvendes. Hvis man tager en globus og betragter Ækvator og to længdegrader, vil man bemærke, at længdegraderne står vinkelret på Ækvator, og at de tre cirkler danner en trekant ABC.



Vinkelsummen i trekant ABC er tydeligvis større end 180° , så Euklids geometri gælder åbenbart ikke for en kugleflade. En kugleflade er selvsagt ikke mindre virkelig end et plan, hvor Euklids geometri gælder. Man må derfor opgive at bruge den fysiske virkelighed til at afgøre, om matematikkens definitioner er sande eller falske.

I den moderne matematik har det overhovedet ingen mening at spørge, om en definition eller en forudsætning er sand eller falsk. Det eneste, man må sikre sig, er, at definitionerne ikke er selvmodsigende. Hvis definitionerne så svarer til kendsgerninger, man rent eksperimentelt kan konstatere gælder for den fysiske verden, så betyder det, at matematikken kan bruges til at beskrive denne. Men det betyder ikke, at den fysiske verden har bekræftet matematikkens definitioner.