NEWTONS AFKØLINGSLOV

Vi skal se på en anvendelse af differentialregningen, der drejer sig om et legeme, der ændrer temperatur med tiden. Det kan fx være en kop kaffe, der køles af ved at stå i stuen eller en flaske kølig hvidvin, der varmes op i stuen.

Hvis man måler, hvordan temperaturen af en kop kaffe ændrer sig med tiden, opdager man, at jo større temperaturforskellen mellem kaffen og lokalet er, des større er temperaturændringen af kaffen. Mere præcist gælder nemlig

Newtons afkølingslov. *Ændringen i et legemes temperatur er proportional med temperaturforskellen mellem legemet og omgivelserne.*

Vi betegner kaffens temperatur med $K(t)$, fordi den er en funktion af tiden t, efter at den er hældt op i koppen. Desuden går vi ud fra, at stuetemperaturen er 20°.

Så er den afledede $K'(t)$ kaffens øjeblikkelige temperaturændring, og forskellen mellem kaffens og stuens temperatur er $K(t)$ - 20. Newtons afkølingslov fastslår så, at der gælder

$$K'(t) = k\cdot(K(t)-20) \qquad (2)$$

Her er k proportionalitetsfaktoren, der bl. a. afhænger af kruset og, hvor meget kaffe, der er tale om.

Ligningen er næsten magen til den ligning for begrænset vækst, der tidligere er omtalt. Vi kan sammenligne ligningerne

$$f'(x) = k\cdot(G-f(x)) \quad \text{og} \quad K'(t) = k\cdot(K(t)-20),$$

og ser, at $G - f(x)$ er ombyttet med $K(t) - 20$. I begge tilfælde er der tale om forskellen mellem funktionsværdierne og grænsen.

Funktioner af typen

$$K(t) = a\cdot e^{kt} + 20,$$

er løsninger til ligningen (2), fordi

$$K'(t) = a\cdot k\cdot e^{kt}$$

og

$$k\cdot(K(t)-20) = k\cdot(a\cdot e^{kt}+20-20) = a\cdot k\cdot e^{kt} = K'(t).$$

Det viser sig desuden, at der ikke er *andre* løsninger til ligningen (2) end disse.

Konstanterne a og k må bestemmes ud fra oplysninger om afkølingsprocessen. Hvis kaffen ved målingernes begyndelse (dvs. for $t = 0$) har en temperatur på 85°, er $K(0) = 85$, dvs.

$$85 = a\cdot e^{k\cdot 0} + 20 \;\Leftrightarrow\; 65 = a\cdot e^0 \;\Leftrightarrow\; a = 65.$$

Derfor kan vi nu skrive

$$K(t) = 65\cdot e^{kt} + 20.$$

For at bestemme k, måler vi, at kaffen 4 minutter efter serveringen er 70° varm, dvs. $K(4) = 70$. Vi får altså

$$70 = 65\cdot e^{4k} + 20 \;\Leftrightarrow\; 65\cdot e^{4k} = 50 \;\Leftrightarrow\; e^{4k} = \tfrac{50}{65}$$
$$\Leftrightarrow\; 4k = \ln\tfrac{50}{65} = -0{,}2624 \;\Leftrightarrow\; k = -0{,}066.$$

Denne ligning kan selvfølgelig også løses på cas.

Dermed har vi regneforskriften for den funktion $K(t)$, der angiver kaffens temperatur t minutter efter serveringen:

$$K(t) = 65\cdot e^{-0{,}066t} + 20 \quad \text{eller} \quad K(t) = 65\cdot 0{,}936^t + 20.$$

Forskellen $K(t)$ - 20 mellem kaffens og stuens temperatur er den eksponentielle udvikling $65\cdot 0{,}936^t$, hvis vækstrate er 0,936-1 = -0,064 = -6,4%. Temperaturforskellen aftager altså med 6,4% pr. minut. Situationen ses på fig. 14.

Jens Carstensen m.fl.
Mat B2, stx
Systime 3.udgave, 1. oplag 2013

Da $0,936^t \to 0$ for $t \to \infty$, ser vi, at $K(t) \to 20$ for $t \to \infty$, hvilket stemmer med vores erfaringer.

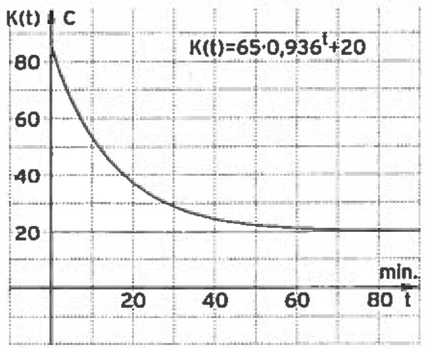

Fig. 14

EKSEMPEL 12. Der er hældt varmt vand op i et bæger, og i en periode måltes vandets temperatur hvert 2. minut. Stuens temperatur er 20°. Målingerne ser sådan ud:

Minutter	0	2	4	6	8	10	12	14
Temp °C	86,8	83,1	78,3	74,4	70,8	67,9	64,9	62,5
Minutter	16	18	20	22	24	26	28	
Temp °C	60,2	58,2	55,5	53,7	52,3	50,8	49,5	

På cas foretager vi eksponentiel regression, idet vi indtaster *forskellen* mellem vandets og stuens temperatur, dvs. tallene 66,8 ; 63,1 ; 58,3 ...

Vi får forskriften $f(x) = 65,6 \cdot 0,971^x$. Dette betyder, at *forskellen* mellem vandets og stuens temperatur aftager med 1-0,971 = 0,029 = 2,9% i hvert 2-minutters interval.