18. Lucasfølger

Når der i de foregående kapitler er gjort en del ud af Fi–følgen, skyldes det traditionen, og den meget tætte forbindelse med Φ vi adskillige gange har set, men også fordi Fibonaccitallene i sig selv er interessante og indeholder mange overraskelser. Nu er Fibonaccifølgen kun en af de såkaldte *L–følger* (Lucas–følger), og da disse også i denne sammenhæng er interessante, vil vi se nærmere på dem. Det er de følger, $a_1, a_2, a_3, \ldots$, der opfylder, at

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ , \ n > 2.$$

Nedenfor ses to andre eksempler på L–følger:

$$3, 7, 10, 17, 27, 44, 71, \ldots \qquad (1)$$

$$-3, 1, -2, -1, -3, -4, -7, \ldots \qquad (2)$$

I (1) dannes nu forholdene $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, svarende til hvad vi gjorde for Fibonaccifølgen:

$$\frac{7}{3} = 2{,}333\ ,\ \frac{10}{7} = 1{,}429\ ,\ \frac{17}{10} = 1{,}7\ ,\ \frac{27}{17} = 1{,}588\ ,$$

$$\frac{44}{27} = 1{,}630\ ,\ \frac{71}{44} = 1{,}614\ ,\ \frac{115}{71} = 1{,}620\ ,\ \frac{186}{115} = 1{,}617\ , \ldots ,$$

der utroligt nok også ser ud til at gå mod Φ! Prøv selv med (2).

Før dette undersøges nærmere, vil vi se på L–følgernes opbygning. I skemaet er a_i udtrykt ved a_1 og a_2, og til højre er F_i angivet (vi slap dem altså ikke helt!):

i	a_i	F_i
1	$a_1 = 1 \cdot a_1$	$F_1 = 1$
2	$a_2 = 1 \cdot a_2$	$F_2 = 1$
3	$a_3 = 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2$	$F_3 = 2$
4	$a_4 = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2$	$F_4 = 3$
5	$a_5 = 2 \cdot a_1 + 3 \cdot a_2$	$F_5 = 5$
6	$a_6 = 3 \cdot a_1 + 5 \cdot a_2$	$F_6 = 8$
7	$a_7 = 5 \cdot a_1 + 8 \cdot a_2$	$F_7 = 13$
:	: : :	: :

Man opdager hurtigt (?), at koefficienterne til a_1 og a_2 er Fibonaccital, og kan let vise, at

$$a_n = F_{n-2}a_1 + F_{n-1}a_2\ , \quad n > 2\ . \tag{3}$$

Der er hermed skabt en forbindelse mellem Fibonaccifølgen og den vilkårlige L–følge. Dette sætter os i stand til at bekræfte den tidligere fremsatte formodning.

Sætning 1. Hvis $a_1, a_2, a_3, \dots$ er en L–følge, gælder det, at

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \to \Phi \quad \text{for} \quad n \to \infty\ .$$

Bevis. Vi danner forholdet $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, omskriver det vha. (3), forkorter med a_2F_{n-2} og lader til sidst n gå mod uendelig:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{F_{n-2}a_1 + F_{n-1}a_2}{F_{n-3}a_1 + F_{n-2}a_2} = \frac{\frac{a_1}{a_2} + \frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}}{\frac{F_{n-3}}{F_{n-2}}\frac{a_1}{a_2} + 1} \to \frac{\frac{a_1}{a_2} + \Phi}{\frac{1}{\Phi}\frac{a_1}{a_2} + 1} \quad \text{for} \quad n \to \infty\ .$$

Denne grænseværdi ligner ikke umiddelbart, den vi forventede, men ved at forlænge med Φ fås det ønskede:

$$\frac{\frac{a_1}{a_2} + \Phi}{\frac{1}{\Phi}\frac{a_1}{a_2} + 1} = \frac{\left(\frac{a_1}{a_2} + \Phi\right)\Phi}{\frac{a_1}{a_2} + \Phi} = \Phi\ .$$ ■

Blandt L–følgerne har også *Lucasfølgen*, $L_1, L_2, L_3, \dots$, været genstand for stor interesse. Den er bestemt ved, at $L_1 = 1$ og $L_2 = 3$, hvorfor dens begyndelse ser sådan ud:

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, \dots\ .$$

De enkelte tal i følgen kaldes *Lucastal*. Disse og følgen har fået navn efter Edouard Lucas, som vi tidligere har mødt, da det var ham der opdagede Fibonaccitallene i Pascals trekant.

Der er mange sammenhænge mellem Lucas– og Fibonaccital, fx fås af (3), at

$$L_n = F_{n-2} + 3F_{n-1}\ , \quad n > 2\ .$$

Det er også let at vise, at følgende simple formel gælder

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}\ , \quad n > 1\ . \tag{4}$$

Denne sammenhæng giver mulighed for, på en let måde, at vise, at

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{5}$$

Det er ikke meningen at undersøge Lucastallene på samme grundige måde som Fibonaccitallene. Det overlades til læseren at gå på opdagelse, og nedenfor følger et par pudsigheder, der er grydeklare.

145

12

13

Jens Carstensen og Jesper Frandsen
Matematik for mellemniveau
Systime 1991

da Vinci og le Corbusier

Som allerede nævnt har mange kunstnere benyttet gyldne rektangler og snit. Som eksempler på kunstnere, der bevidst har arbejdet med det, vil vi se på to verdenskendte kunstnere fra hver sin tid, nemlig Leonardo da Vinci og le Corbusier.

Italieneren Leonardo da Vinci (1452–1519) var et universalgeni, men kendes vel især som kunstner, da han bl.a. har malet "Mona Lisa". Som så mange andre før ham forsøgte han at finde sammenhænge og love for menneskelegemets proportioner, hvilket fremgår af hans billede "Homo ad circulum" fra ca. 1460, se fig. 26a.

Vi vil nu se på, nogle af billedets forhold, og kan kun opfordre læseren til ved målinger af sig selv og andre, at kontrollere om påstandene er rigtige.

På fig. 26b er personen anbragt i et kvadrat, hvilket viser, at afstanden fra fingerspids til fingerspids er lig med hans højde, AB.

14

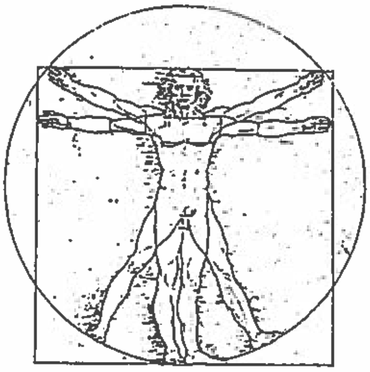


Fig. 26a

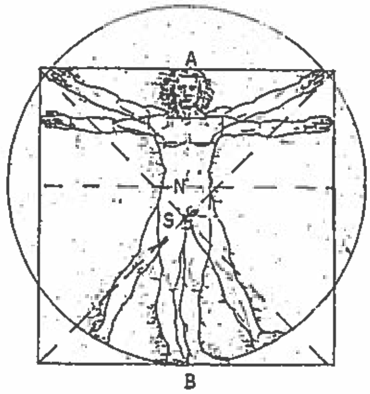


Fig. 26b

Tegnes kvadratets diagonaler skærer de hinanden i skridtet S, dvs. AS = SB. Desuden lod da Vinci en vandret linje gennem navlen være skillelinjen mellem over– og underkroppen.

Leonardo da Vincis påstand var nu, at

$$\frac{\text{Totalhøjde}}{\text{Underkropslængde}} = \frac{\text{Underkropslængde}}{\text{Overkropslængde}} = \phi$$

eller

$$\frac{AB}{BN} = \frac{BN}{AN} = \phi\,.$$

Cirklen har ikke umiddelbart noget med Φ at gøre, men benyttes til at vise, at navlen er centrum for den cirkel, der går gennem fingerspidserne, når de løftes til issehøjde, og tå–spidserne, når benene spredes passende.

Når så mange gennem tiderne har forsøgt at finde Φ i det menneskelige legemes proportio–ner, skyldes det bl.a. en opfattelse af gyldne snit og gyldne rektangler som guddommelige forhold, og da mennesket blev skabt i Guds billede, må de kunne genfindes i mennesket. Dette understreges af, at navnet "det gyldne snit" først benyttes i det 19.århundrede. Tidligere hed det bl.a. "den guddommelige proportion", eller på italiensk "De Divina Proportione". Dette er også navnet på et værk af Luca Pacioli fra 1509, der blev illustreret af Leonardo da Vinci. Bogen indeholder redegørelser for, hvordan Φ optræder i plane og rumlige figurer. Det kan nævnes, at Luca Pacioli bl.a. hævder, at

- det gyldne snits forhold er enestående, ligesom Gud er enestående.

- det gyldne snit indeholder tre størrelser som gensidigt betinger hinanden (med betegnelser–ne fra definitionen er det a, b og a+b) på samme måde som faderen, sønnen og hellig–ånden.

- det gyldne snit lader sig kun definere vha. irrationelle tal (√5 indgår), og kan derfor, på samme måde som Gud, ikke indordnes i den virkelige/rationelle verden.

- det gyldne snit er evigt, uforanderligt og nærværende i alle sine dele, ganske som Gud er evig, uforanderlig og altid nærværende.

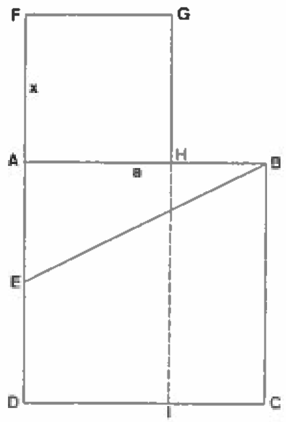
Hvis billedet på fig. 26 synes bekendt, kan det skyldes, at det i dag benyttes som bomærke (logo), på bogomslag mm.

Bent Hirsberg og Klaus Holth 15
Tal og geometri, nogle træk af den græske matematiks historie, Trip 1. udgave, 1. oplag 1982
S35

Konstruktionen af kvadratet x^2 kan tolkes som en geometrisk måde at løse andengradsligningen $x^2 = ab$ på. Identificerer vi igen størrelserne med rationale tal, ser vi, at selv om a og b er rationale tal, så behøver x ikke nødvendigvis at være det. Men konstruktionen viser, at man altid kan løse ligningen geometrisk. At grækerne også kunne løse mere komplicerede andengradsligninger, er nedenstående et eksempel på. Vi skal her finde en løsning til ligningen

$$x^2 + ax = a^2$$

Vi kan tolke opgaven således: Konstruer ud fra et givet liniestykke a et liniestykke x, således at kvadratet x^2 og rektanglet ax tilsammen er lige så store som kvadratet a^2. I Euklids Elementer (Bog 2, Sætning 11) anvises følgende konstruktion:



På liniestykket AB (a) konstrueres et kvadrat ABCD (a^2). AD halveres i punktet E, og liniestykket EB tegnes. Dernæst afsættes et liniestykke med samme længde som EB ud ad EA til F. På AB afsættes endeligt kvadratet AFGH (x^2) og rektanglet AHID (ax). Påstanden er nu, at kvadratet og rektanglet tilsammen er lig kvadratet ABCD.

Da trekant EAB er retvinklet og EB = EF, følger det af den pythagoræiske læresætning (Sætning 3.4), at

$$(x + \frac{1}{2}a)^2 - (\frac{1}{2}a)^2 = a^2$$

S36

Af Sætning 3.3 følger nu, at differensen mellem disse to kvadrater er lig med rektanglet $(x+a)x$, d.v.s.

$$x^2 + ax = a^2$$

AH = x er således det søgte liniestykke. Om H's deling af AB skriver Euklid:

> »At dele en given ret linie således, at det rektangel, der indesluttes af hele linien og det ene af stykkerne, er lig kvadratet på det andet stykke«.

Delingen af AB i AH og HB kaldes det *gyldne snit*. Konstruktionen har haft stor betydning for både græsk og senere europæisk kunst og arkitektur. En af årsagerne til dette er, at et rektangel med siderne AH og HB af de fleste opfattes som mere harmonisk end mere aflange eller mere sammentrykkede rektangler.