Vi kigger på summen af alle potenser af $2$ fra $0$ til $n$

$$2^{0}+2^{1}+2^{2}+…+2^{n-2}+2^{n-1}+2^{n}$$

Vi kalder den $S$:

$$S=2^{0}+2^{1}+2^{2}+…+2^{n-2}+2^{n-1}+2^{n}$$

Inde i prikkerne står alle potenserne af $2$ fra $2^{3}$ og op til $2^{n-3}$.

Vi kigger nu på $2S:$

$$2S=2·(2^{0}+2^{1}+2^{2}+…+2^{n-2}+2^{n-1}+2^{n})$$

Når vi ganger to ind i parentesen vil alle potenserne blive 1 højere, så vi har nu alle potenser af $2$ fra $1$ til $n+1.$

$$2S=2^{1}+2^{2}+2^{3}+…+2^{n-1}+2^{n}+2^{n+1}$$

Inde i prikkerne står der altså nu alle potenserne af $2$ fra $2^{4}$ og op til $2^{n-2}$.

Vi regner så på $S=2S-S$:

$$S=2S-S=2^{1}+2^{2}+2^{3}+…+2^{n-1}+2^{n}+2^{n+1}-(2^{0}+2^{1}+2^{2}+…+2^{n-2}+2^{n-1}+2^{n})$$

Vi ophæver minusparentesen ved at skifte fortegn på alle leddene:

$$S=2S-S=2^{1}+2^{2}+2^{3}+…+2^{n-1}+2^{n}+2^{n+1}-(2^{0}+2^{1}+2^{2}+…+2^{n-2}+2^{n-1}+2^{n})$$

$$=2^{1}+2^{2}+2^{3}+…+2^{n-1}+2^{n}+2^{n+1}-2^{0}-2^{1}-2^{2}-…-2^{n-2}-2^{n-1}-2^{n}$$

Her kan vi se at de fleste led optræder både med + og -, så de går ud:

$$S=2S-S=2^{1}+2^{2}+2^{3}+…+2^{n-1}+2^{n}+2^{n+1}-(2^{0}+2^{1}+2^{2}+…+2^{n-2}+2^{n-1}+2^{n})$$

$$=2^{1}+2^{2}+2^{3}+…+2^{n-1}+2^{n}+2^{n+1}-2^{0}-2^{1}-2^{2}-…-2^{n-2}-2^{n-1}-2^{n}$$

Tilbage står kun

$$2^{n+1}-2^{0}=2^{n+1}-1$$

Altså er

$$2^{0}+2^{1}+2^{2}+…+2^{n-2}+2^{n-1}+2^{n}=2^{n+1}-1$$

Eks:

Hvis vi skal udregne $1+2+2^{2}+2^{3}+2^{4}+2^{5}+2^{6}+2^{7}+2^{8}+2^{9}+2^{10}+2^{11}$ kan vi bruge formlen og få:

$$1+2+2^{2}+2^{3}+2^{4}+2^{5}+2^{6}+2^{7}+2^{8}+2^{9}+2^{10}+2^{11}=2^{12}-1=4095$$