

## 17 Tæthedsfunktionen

### Sætning 17.1

Tæthedsfunktionen  $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ , hvor  $\mu \in \mathbb{R}$ , og  $\sigma > 0$ , antager globalt maksimum i  $x = \mu$ .

### Bevis 17.1

For at vise, at  $f$  antager globalt maksimum i  $x = \mu$ , bestemmes monotoniforholdene for  $f$ .

Først bestemmes  $f'(x)$ . Bemærk, at  $f$  er en sammensat funktion med  $h(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^x$  som den ydre funktion og  $g(x) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$  som den indre. Vi benytter derfor kædereglens:  $f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$ .

Den ydre funktion differentieret med den indre indsat er

$$h'(g(x)) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Vi omskriver og differentierer den indre funktion  $g(x)$ :

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} = -\frac{1}{2\sigma^2} \cdot (x-\mu)^2 \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2} \cdot (x^2 + \mu^2 - 2x\mu) \end{aligned}$$

$$g'(x) = -\frac{1}{2\sigma^2} \cdot (2x - 2\mu) = -\frac{1}{2\sigma^2} \cdot 2 \cdot (x - \mu) = -\frac{1}{\sigma^2} \cdot (x - \mu)$$

Vi kan nu bestemme  $f'(x)$  vha. kædereglens:

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{\sigma^2}\right) \cdot (x - \mu)$$

Så løser vi  $f'(x) = 0$ , hvor vi benytter nulreglen. Den eneste faktor i forskriften for  $f'(x)$ , der kan give nul, er  $x - \mu$ , så vi får:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - \mu = 0 \Leftrightarrow x = \mu$$

Dvs., at  $x = \mu$  er den eneste  $x$ -værdi, hvor der er en vandret tangent.

Vi laver en fortegnundersøgelse på intervallerne  $x < \mu$  og  $x > \mu$ .

For at afgøre fortegnet for  $f'(x)$ , kigger vi på de faktorer, der indgår i dens forskrift.

For  $x < \mu$  gælder, at  $\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} > 0$ ,  $e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} > 0$ ,  $-\frac{1}{\sigma^2} < 0$  og  $x - \mu < 0$ , dvs.  $f'(x) > 0$ .

For  $x > \mu$  gælder, at  $\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} > 0$ ,  $e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} > 0$ ,  $-\frac{1}{\sigma^2} < 0$  og  $x - \mu > 0$ , dvs.  $f'(x) < 0$ .

Dvs., at  $f$  er voksende i intervallet  $] -\infty; \mu]$  og aftagende i intervallet  $[\mu; \infty[$ . Vi kan dermed konkludere, at  $f$  antager globalt maksimum i  $x = \mu$ .

□