# Introduktion

I dag skal vi arbejde med logaritmer.

Det første vi skal forstå omkring logaritmer er, at deres claim to fame er at være *inverse funktioner* (eller omvendte funktioner alt efter temperament).

Inverse funktioner kender vi sådan set udmærket:

Den omvendte funktion af

Er

Den omvendte funktion af

Er

Den omvendte funktion af

Er

(i hvert fald når er positiv).

Den omvendte funktion af

Er

Med andre ord er en invers eller omvendt funktion, den der annullerer det funktionen gør:

Hvis vi opløfter i en eller anden konstant , kan vi altså tage den te rod for at ”komme tilbage til ”. Og de her te rødder er som sådan bare opstået netop for at have det modsatte af af sætte i den te potens.

Men hvad hvis vi i stedet for at have som grundtal, har som potens? Altså

Her har vi i stedet de inverse funktioner *logaritmerne.*

Den inverse funktion af

Er

(så hvor man ved rødderne bruger symbolet bruger man ved logaritmerne forkortelsen ).

Vi arbejder især med to logartimer:

* 10-talslogaritmen som man typisk betegner og som er den inverse funktion til
* Den naturlige logaritme som man betegner og som er den inverse funktioen til .

OBS! Hvis man i TI-Nspire skal bruge skal man skrive ellers tror TI man selv (i bedste eulerske stil) har fundet på en ny konstant der hedder e, som TI ikke kender.

# Oversigt over del 7 dele:

Del 1 - introduktion

Del 2 - Præsentation af logaritmeregnereglerne og bruge dem

Del 3 - beviser for logaritmeregnereglerne

Del 4 - Andre logaritmer end og

Del 5 - Anvendelser

Del 6 - historisk perspektiv

Del 7 - Flere beviser

## Del 1 - introduktion

I denne del skal vi blive mere trygge ved, hvad det vil sige at og er de inverse funktioner til og .

### Opgave 1.1

Start med at udfylde nedenstående skemaer. Skriv dine resultater som decimaltal med mindst 5 cifre.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 3,5 | 4,2 | 6,1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

NB!: Husk at skrive i TI i stedet for

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Udfyld så følgende skemaer:

I øverste række skriver du resultaterne fra de to første skemaer (grøn på grøn, blå på blå)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 10 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2,71828 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

### Opgave 1.2

Lav et grafvindue i TI hvor både x-aksen og y-aksen går fra 0 til 10.

Indtegn nu graferne for , og .

Lav endnu et grafvindue i TI hvor både x-aksen og y-aksen går fra 0 til 10.

Indtegn nu graferne for , og

Hvad kan du se?

Giver det mening i forhold til at de er hinandens omvendte funktioner?

### Opgave 1.3

Brug det at logaritmerne er inverse funktioner af at opløfte i potens til at forklare

## Del 2 - Finde ud af hvad logaritmeregnereglerne er og prøve at bruge dem

I denne del skal vi stifte bekendtskab med det, der gør logaritmer rigtig gode når vi skal løse ligninger: logaritmeregnereglerne:

Vi vender senere tilbage til hvorfor de her regler gælder, men i første omgange skal vi bare bruge dem til at løse ligninger.

### Opgave 2.1

I første omgang bruger vi lidt tid på 1. og 2. Det er ikke dem vi bruger oftest, fordi vi ikke bruger dem til at løse ligninger, men historisk set var det super vigtige når man skulle gange store tal sammen om ikke havde en lommeregner (hvilket man typisk ikke havde i 1800-tallet).

1. Find vha. TI , og
2. Vis vha. tallene fra a) at
3. Find vha. TI tallene , og
4. Vis vha. tallene fra c) at
5. Hvis du er overbevist så gå videre, ellers så prøv med flere taleksempler

### Opgave 2.2

Nu vender vi os mod regneregel 3.

1. Vis vha. tallene fra opgave 2.1 c) at og

Regneregel 3 er klart kongen af de tre logaritmeregneregler. Den kan nemlig hjælpe os med at løse ligninger som

Det vil altså sige at hvis vi har en eksponentiel funktion

Og vi kender men gerne vil isolere så kan vi bruge regneregel 3.

Her kan du se hvordan:

Hvis vi tager udgangspunkt i ligningen ovenfor:

Så tager jeg nu logaritmen på begge sider (husk det er en ligning så jeg må gøre lige hvad jeg vil, bare jeg gør det på begge sider)

Herefter bruger jeg regneregel 3 på venstre side:

Jeg kan så dividere med på begge sider og få:

Altså er

### Opgave 2.3

Brug metoden til at løse følgende ligninger (tjek i med solve at du har fået det rigtige svar):

### Opgave 2.4

En eksponentiel funktion er givet ved forskriften

Brug metoden til at finde når

### Opgave 2.5

Du sætter 10000 kr. ind på en konto til 0,3% i rente pr. år.

Du vil gerne vide, hvor lang tid der går før du har 11000 kr.

Brug metoden til at bestemme antal terminer der går, før din opsparing er vokset til 11000 kr.

## Del 3 - Bevis for logaritmeregnereglerne

I denne del skal vi bevise logaritmeregnereglerne. Først vil jeg dog lige synge en sang om, hvorfor de måske ikke er så mærkelige som de ser ud:

Hvis vi nu tager udgangspunkt i funktionen

Med den inverse

Så er det vi gerne vil vise at

Eller med en anden notation

Men hvis vi kigger på så ved vi jo godt at

Eller med en anden notation

Hvis vi kigger på de to orange linjer, så giver det måske meget god mening at når det nederste gælder for så gælder det øverste for den modsatte funktion?

Hvis ikke, så kan de være beviset overbeviser dig :)

Vi beviser alle tre regneregler, men kun for - beviset er PRÆCIS det samme for hvis man erstatter med

Aftalen er at jeg beviser den første og så bruger du samme strategi til nummer 2.

Til nummer 3 må du enten bruge samme strategi eller se om du kan finde en smartere.

Okay okay okay: her er det STORE TRICK vi skal bruge til beviserne igen og igen og igen:

Here goes: Jeg skal vise at

Vi starter derfor på venstre side og prøver at komme frem til højre:

Til regneregel 2 bruger man fuldstændig samme tricks (men dog en anden potensregneregel), til regneregel 3 kan man enten bruge helt samme trick (men dog en tredje potensregneregel) eller man kan bruge regneregel 1, man væger selv:

### Opgave 3.1

Bevis de sidste to regneregler.

Bevis for regneregel 2:

Bevis for regneregel 3:

## Del 4 - Når vi bruger andre logaritmer end og

I denne del vender vi tilbage til at der findes andre logaritmer end og .

 er den inverse til og er den inverse til , er den inverse til . Det gælder altså også at . Så er den omvendte funktion af og derfor er:

### Opgave 4.1

1. Forklar hvorfor
2. Udregn
3. , hvad er ?

### Del 5 - anvendelser

Kan det så bruges til noget?

Ja! Det kan bruges til at se hvornår folk fusker (for det gør de).

Se videoen

<https://www.youtube.com/watch?v=vIsDjbhbADY>

Særligt interesserede kan læse hvordan det er blevet brugt for (relativt) nyligt:

https://www.zetland.dk/historie/sOz9BNG3-mo4Ez4QK-b8b71

## Del 6 - historisk perspektiv

I denne del skal vi kigge på hvorfor logaritmer var fede før vi fik lommeregnere. Det er her hvor regneregel 1 virkelig kommer til sin ret!

Åbn dokumentet ”Logaritmer i historisk perspektiv”, læs gennemgangen og lav øvelserne.

## Del 7 - flere beviser

For dem der bare ikke kan få beviser nok

For logaritmer helt generelt gælder der to ret fede regler (som dog ikke bruges nær så meget som logaritmeregnereglerne):

Dem skal vi også bevise:

Bevis for nummer 1:

Det svarer til at vise at

Vi tager udgangspunkt i venstre side:

Pr. definition af logaritmer skal vi vise at det er det tal man skal opløfte i for at få . Så det viser vi:

Dette skal altså give for at vi har vist vores regel:

Altså er vores ligning bevist.

Bevis for nummer to:

Betragt ligningen

Brug og regneregel 3 (fra del 2) til at isolere .

Brug og regneregel 3 (fra del 2) til at isolere .

Indse at du har bevist at ligningen er sand.