Vi kigger på en trekant lavet af vektorer:



Vi vil gerne vise at

$$\cos(\left(v\right))=\frac{\vec{a}·\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|·\left|\vec{b}\right|}$$

Før vi går i gang med beviset laver vi lige en lille ”værktøjskasse”

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | svar | Facit |
| 1 | $$\cos(\left(v\right))=\frac{hos}{hyp}$$ | Ikke relevant | Ikke relevant |
| 2 | Vis at $\vec{a}·\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^{2}$ |  |  |
| 3 | Udregn $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)·\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$ (brug også værktøjskasse 2) |  | $$\left|\vec{a}\right|^{2}+\left|\vec{b}\right|^{2}-2·\vec{a}·\vec{b}$$ |

Vi går nu i gang med beviset. Start med at tegne trekanten på et stykke papir.

**Bevis:**

1. Start med at tegne højden fra der hvor $\vec{b}$ ender, kald den $h$.
2. Der er nu to retvinklede trekanter. De har begge $h$ som katete. Hvor lange er deres hypotenuser? Hvis vi kalder den venstre af kateterne i ”bunden” for $x$ hvor lang bliver den anden så? Skriv disse ting på din skitse.
3. Din figur bør se sådan ud nu:



$$x$$

1. Brug Pythagoras’ sætning i begge retvinklede trekanter. Så får I to ligninger. Isolér $h^{2}$ i den ene og indsæt udtrykket i den anden - reducér. Når du har reduceret bør du have et udtryk hvor $x^{2}$ ikke indgår men $2\left|\vec{a}\right|x$ gør

Hints:

* Udregn potensen $\left(\left|\vec{a}\right|-x\right)^{2}$ men husk at lade parentesen stå, hvis der er et minus foran, ophæv så minusparentesen
* Lad $x^{2}$ og $-x^{2}$ gå ud med hinanden
1. Forklar vha. 1 i værktøjskassen, hvorfor $\cos(\left(v\right))=\frac{x}{\left|\vec{b}\right|}.$ Isolér $x$ i denne ligning og indsæt udtrykket i stedet for $x$.
2. Forklar vha. 2. i værktøjskassen hvorfor $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^{2}=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)·\left(\vec{a}-\vec{b}\right). $Indsæt din udregning af $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)·\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$ fra værktøjskassen 3 i stedet for $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.
3. Isolér $cos⁡(v)$.

Du skulle nu gerne have

$$\cos(\left(v\right))=\frac{\vec{a}·\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|·|\vec{b}|}$$

Der er to ”prikker” i udtrykket. Overvej om det er gangetegn mellem tal eller prikker mellem vektorer.

## Opgave 1Gruppe af mænd Laptop

Brug formlen til at finde vinklen mellem følgende vektorer. Udregn brøken i hånden. Når du så har et udtryk på formen $\cos(\left(v\right))=\frac{n}{m}$ så skriv i TI: $\arccos(\left(\frac{n}{m}\right))$ så giver det dig vinklen.

1. $\vec{a}=\left(\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\right)$ og $\vec{b}=\left(\begin{matrix}-1\\4\end{matrix}\right)$
2. $\vec{a}=\left(\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right)$ og $\vec{b}=\left(\begin{matrix}-2\\-3\end{matrix}\right)$
3. $\vec{a}=\left(\begin{matrix}3\\3\end{matrix}\right)$ og $\vec{b}=\left(\begin{matrix}5\\-1\end{matrix}\right)$
4. $\vec{a}=\left(\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right)$ og $\vec{b}=\left(\begin{matrix}-2\\-2\end{matrix}\right)$
5. $\vec{a}=\left(\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right)$ og $\vec{b}=\left(\begin{matrix}-3\\2\end{matrix}\right)$

## Opgave 2MandBlyantLaptop

En trekant udspændes af punkterne $A(1,1)$, $B(3,9)$ og $C(0,7)$.

1. Tegn en skitse af situationen (i hånden).
2. Find koordinaterne forbindelsesvektorerne, der udgør trekantens sider.
3. Find længden af trekantens sider.
4. Find trekantens vinkler.

## Opgave 3BlyantHoved med tandhjul

Bevis at det generelt for en vilkårlig trekant gælder at:

$$\cos(\left(A\right))=\frac{a^{2}+b^{2}-c^{2}}{2ab}$$

Hvis vi som vanligt navngiver hjørnerne A, B og C med de modstående sider hhv. a, b og c.

Beviset følger samme struktur som beviset ovenfor.

Hvad sker der, hvis A er en ret vinkel?