Facit – Aflevering 4

Opgave 1

En patient har taget en pille med 800 mg af et smertestillende middel. Blodprøven viser, at massen af soffet i patientens blod aftager som vist i følgende tabelen til højre.

I en model kan sammenhængen beskrives ved $\mathbf{f}(t)=b\cdot \mathbf{a}^{t}$, hvor $\mathbf{f}(t)$ betegner massen af stoffet i patientens blod og t betegner tiden (målt i timer efter indtagelsen)

a) Bestem en forskrift for sammenhængen:

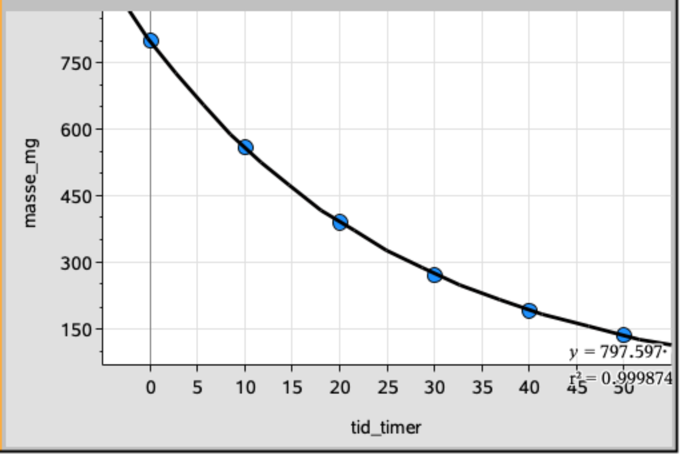
Foreskriften for den eksponentielle funktion der bedst beskriver data, kan findes via regression. Regressionen er udført i viduet til højre.

$\mathbf{f}(t):=\mathbf{stat.RegEqn}(t)$

Regressionen giver følgende eksponetielt aftagende funktion

$\mathbf{f}(t) \blacktriangleright 797.597\cdot (0.964896)^{t}$

	A tid_timer	B masse...	C	D	E	F
=						
1	0	800				
2	10	560				
3	20	390				
4	30	270				
5	40	190				
6	50	135				
7						



b) Hvor meget af stoffet er der tilbage i blodet efter en time ifølge modellen?

Vi finder løsningen når $t=1$

$\mathbf{f}(1) \blacktriangleright 769.599$

Efter en time er der 770 mg af stoffet tilbage i blodet.

c) Hvornår er mængden af stoffet i blodet halveret?

Vi benytter funktionens fremskrivningsfaktor $\mathbf{a}:=0.964896$

Vi kan finde halveringstiden for en eksponentiel funktion ved brug af formlen for halveringskonstanten:

$$\mathbf{t_{halv.}}:=\frac{\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)}{\log_{10}(\mathbf{a})} \blacktriangleright 19.3969$$

Mængden af stof i blodet er halveret efter 19,4 timer.

For at midlet kan være effektivt, skal indholdet i blodet være over 300 mg.

d) Hvor mange timer går der, før patienten skal tage den næste pille?

Patienten skal tage den næste pille, inden indholdet i blodet er under 300 mg.

Vi kan finde ud af hvornår dette sker ved at løse ligningen

$f(t)=300 \blacktriangleright 797.597\cdot(0.964896)^t=300$

Løsning på lingningen:

$\text{solve}(f(t)=300,t) \blacktriangleright t=27.3633$

Patienten skal tage den næste pille inden der er gået 27,4 timer.

Opgave 2

Grafen for en eksponentielt aftagende funktion f(x) går gennem punktet (7 ; 200) og halveringskonstanten er $t_{halv}:=12 \blacktriangleright 12$.

a) Hvilket af følgende punkter går funktionen også igennem og forklar hvorfor?

Punkt 1: (19; 400) **Punkt 2: (14; 100)** **Punkt 3: (19; 100)** **Punkt 4: (12; 400)**

Vi ved at fuktionen går igennem punktet (7; 200).

$x_1:=7 \blacktriangleright 7$

$y_1:=200 \blacktriangleright 200$

Halveringskonstanten fortæller os at funktionsværdien bliver halveret hvergang x stiger 12.

Derfor kan vi finde funktionsværdien i

$x_2:=x_1+t_{halv} \blacktriangleright 19$.

Her må y−værdien blive det halve ift funktionsværdien i $x_1=7$

$y_2:=\frac{y_1}{2} \blacktriangleright 100$

Altså går funktion f(x) gennem punkt 3 (19; 100)

b) Bestem en forskrift for f(x)

Vi kan finde forskriften for funktionen, ved brug af to-punktsformlen og de to punkter som funktionen går igennem fra opgave a.

To-punktsformlen for en eksponentiel funktion

$$a := \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$$

Vi finder funktiopnens b-værdi ved brug af formlen:

$$b := \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

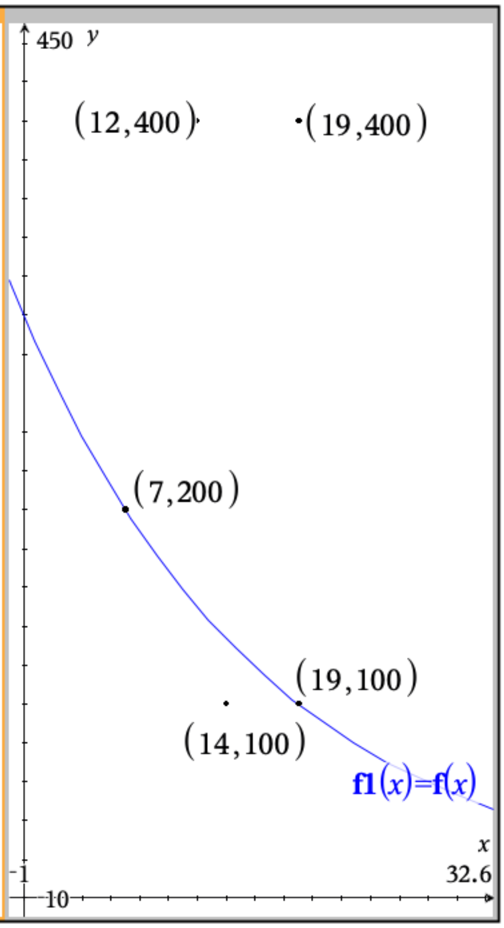
Vi sætter disse værdier ind i foreskriften for en eksponentiel funktion: $f(x) := b \cdot a^x$

Funktions forskriften bliver dermed $f(x)$ ▸ $299.661 \cdot (0.943874)^x$

c) Vis på en graf, hvilke af punkterne, som funktionen går igennem.

Se figuren til højre:

Vi kan se at funktionen f(x) kun passere igennem punkt 3 (19; 100) og (7; 200)



Opgave 3

Tabellen (se til højre) viser udviklingen i antal daglige transaktioner med Bitcoin i perioden 2011–2016.

I en model kan udviklingen beskrives ved funktionen

$f(x) = b \cdot a^x$, hvor $f(x)$ betegner antal daglige transaktioner med Bitcoin til tidspunktet x (målt i år efter 2011).

a) benyt tabellens data til at bestemme a og b

Foreskriften for den eksponentielle funktion der bedst beskriver tabellens data, kan findes via regression.

Regressionen er udført i viduet til højre.

$f(t) := \text{stat.RegEqn}(t)$ ▸ *Udført*

Regressionen giver følgende eksponetielt voksende funktion $f(t)$ ▸ $8565.71 \cdot (1.99715)^t$

Hvor begyndeslesværdien er $b := 8565.71$ ▸ 8565.71

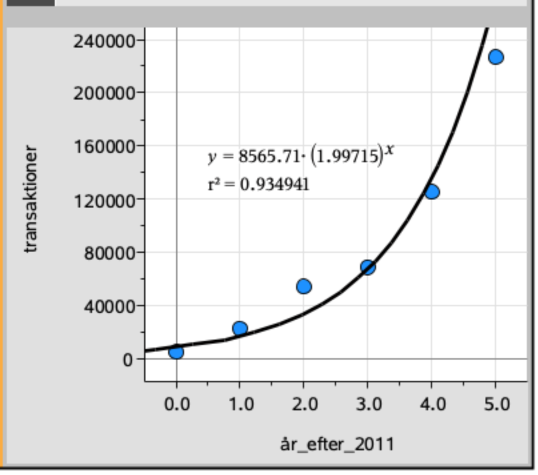
Dette svare til modelens bud på det daglige antal transaktioner i 2011.

Fremskrivningsfaktoren er $a := 1.99715$ ▸ 1.99715

Dette svare til at det daglige antal transaktionervokser med 99,7% hvert år. Altså ca en fordobling.

	A årstal	B år_efter_2011	C transaktioner
1	2011	0	5202
2	2012	1	23023
3	2013	2	53734
4	2014	3	69277
5	2015	4	125379
6	2016	5	226639
7			

D8



b) Benyt modellen til at bestemme det årstal, hvor antal daglige transaktioner med Bitcon overstiger 600.000.

Vi kan finde ud af hvornår dette sker, ved at se hvornår modellen forudsiger en værdi på 600.000. Det gør vi ved at løse ligningenved at løse ligningen

$f(t)=600000$ ▸ $8565.71\cdot (1.99715)^{t}=600000$

Løsning på lingningen:

$\text{solve}(f(t)=600000,t)$ ▸ $t=6.1429$

Modellen foudsiger at det daglige antal transaktioner overstiger 600.000, 6 år efter 2011, altså i løbet af år 2017.

C) Benyt modellen til at bestemme fordoblingstiden.

Vi benytter funktionens fremskrivningsfaktor $a:=1.99715$ ▸ 1.99715

Vi kan finde fordoblingstiden for en eksponentiel funktion ved brug af formlen for fordoblingskonstanten:

$$t_2:=\frac{\log_{10}(2)}{\log_{10}(a)} \;▸\; 1.00206$$

Fordoblingstiden er ca 1 år, hvilket passer med at voresfremskrivningsfaktor er ca. a≈2.

Opgave 4

Prisen p(t) for en sæsonvare til tiden t (målt i uger) er givet ved

$p(t)=20\cdot e^{-0.05\cdot t}$

a) Gør rede for om p(t) er en aftagende eller voksende funktion.

Funktionen er en eksponentiel funktion skrevet med Eulerstal som grundtal.

Funktionens udvikling er afgjordt af $k:=-0.05$ ▸ -0.05

Da $k<0$ kan vi se at det er en aftagende funktion.

b) Omskriv den eksponentielle funktion p(t) til formen $p(t)=b\cdot a^{x}$

Først benytter vi at vi ved at begyndelsesværdien $b:=20$ ▸ 20 er identisk i de to former.

Derefter udregner vi fremskrivningsfkatoren a ud fra k ved brug af formlen:

$a:=e^{k}$ ▸ 0.951229

Dermed kan vi skrive den eksponentielle funktion som $p(t):=20\cdot (0.95)^{t}$

c) Hvor mange procent aftager prisen pr. uge?

Den procentvise udvikling kan udtrykkes som $(a-1)\cdot 100$ ▸ -4.87706

Hvor vi benytter fremskrivningsfaktoren fundet i opg b).

Vi kan dermed konkludere at prisen falder med ca. 5% hver uge.