Fra: D. Pipenbring "Matematik B til A-niveau", matX, 1. udgave (2020)

17
Vektorfunktioner - Cirkel

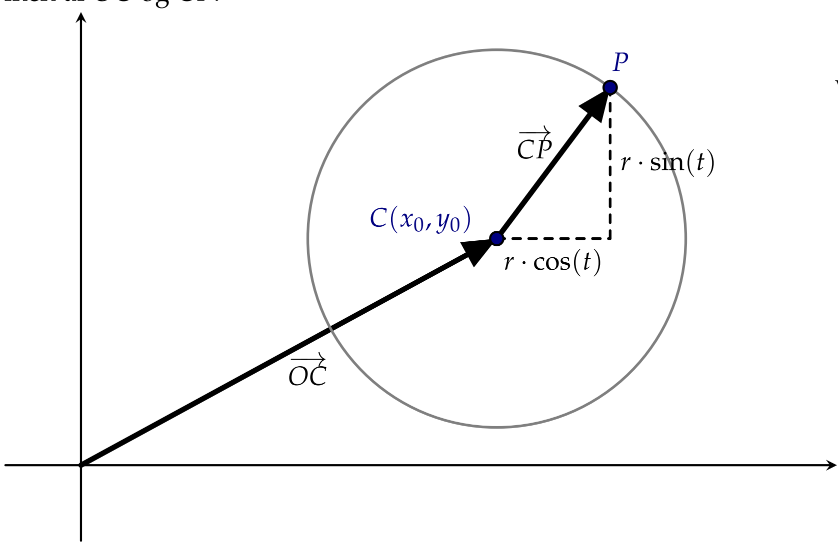
Sætning 24 Vektorfunktionen for en cirkel er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

hvor (x_0, y_0) er centrum og r er radius i cirklen.

Bevis
Dette kan indses ved at se vektorfunktionen for cirklen som summen af $\overrightarrow{OC}$ og $\overrightarrow{CP}$.

Vektorfunktion for en cirkel



$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

Dette sammensættes til

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

hvor (x_0, y_0) er centrum og r er radius i cirklen. Bemærk at koordinatfunktionerne er

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + r \cdot \cos(t) \\ x(t) - x_0 &= r \cdot \cos(t) \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + r \cdot \sin(t) \\ y(t) - y_0 &= r \cdot \sin(t) \end{aligned}$$

De to funktioner kan lægges sammen til

$$\begin{aligned} (x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 &= (r \cdot \cos(t))^2 + (r \cdot \sin(t))^2 \\ (x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 &= r^2 \cdot (\cos(t)^2 + \sin(t)^2) \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= r^2 \end{aligned}$$

Dette er cirklens ligningen.

■

Resultatet kan bruges til at vise at omkredsen af en cirkel er $2\pi r$.

Sætning 25 Omkredsen af en cirkel med radius r er $2\pi r$.

Omkreds for en cirkel.

Bevis
Kurvelængden for vektorfunktion kan beregnes med formlen

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Vektorfunktionen beskriver en fuld cirkel for $0 \leq t \leq 2\pi$ og

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + r \cdot \cos(t) \\ x'(t) &= -r \cdot \sin(t) \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + r \cdot \sin(t) \\ y'(t) &= r \cdot \cos(t) \end{aligned}$$

Dette indsættes for at bestemmes kurvelængden.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \cdot \sin(t))^2 + (r \cdot \cos(t))^2} \, dt$$

Udtrykket kan reduceres ved faktorisering til

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \cdot (\sin(t)^2 + \cos(t)^2)} \, dt$$

Da $\sin(t)^2 + \cos(t)^2 = 1$ kan det reduceres til

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2} \, dt$$

Da $r > 0$ fordi det er radius i cirklen.

$$L = \int_0^{2\pi} r \, dt$$

Nu kan integralet udregnes.

$$L = [rt]_0^{2\pi} = r \cdot 2\pi - r \cdot 0 = r \cdot 2\pi$$

■