UNDERVISNINGS MINISTERIET
STYRELSEN FOR UNDERVISNING OG KVALITET

Matematik B

Højere forberedelseseksamen

Ny ordning

Forberedelsesmateriale

ny-2hf181-MAT/B-09012018

Tirsdag den 9. januar 2018

Forord

I undervisningsforløbet skal der ifølge læreplanen *afsættes 6 timers undervisningstid til forberedelse til den skriftlige prøve i faget, jf. pkt. 4.2, hvor eleverne selvstændigt arbejder med et centralt stillet forberedelsesmateriale under vejledning.*
Dette er uddybet i vejledningen: *Hvert år i løbet af august* [*)] *offentliggøres forberedelsesmateriale til den skriftlige eksamen på hf B gældende for den skriftlige eksamen i december og maj-juni samt august efterfølgende kalenderår. Stoffet skal indgå som en del af det supplerende stof i forløbet, og der skal trænes i opgaveregning i stoffet, fordi der kommer opgaver i stoffet til den skriftlige eksamen.*

[*)] Det foreliggende materiale, som er det første efter 2017-reformen, offentliggøres i januar 2018 og er gældende for den skriftlige eksamen maj-juni 2018 og august 2018.

I dette forberedelsesmateriale er emnet ”Lineær programmering”.

Materialet indeholder teori, eksempler, øvelser og opgaver.
Materialet indeholder også supplerende materiale i to appendikser.
Ved den skriftlige eksamen kan indhold og metoder fra forberedelsesmaterialet indgå i opgaver i begge delprøver. Derfor bør resultaterne af arbejdet med dette emne medbringes til den skriftlige prøve. Der bliver ikke stillet opgaver i det supplerende materiale.

Hf matematik B

Forberedelsesmateriale

Lineær programmering

Maj/juni 2018 og august 2018

Indhold

Indledning

Dette forberedelsesmateriale handler om lineær programmering samt anvendelser heraf.

I forberedelsesmaterialet er der både øvelser, eksperimenter og opgaver. Øvelserne er tænkt som hjælp til forståelse af teorien og metoderne. Opgaverne er tænkt som forberedelse til de opgaver, der kommer til den skriftlige eksamen. Det anbefales at arbejde med øvelser og eksperimenter tidligt i forløbet som et led i opbygningen af forståelsen. På et senere tidspunkt i forløbet og ved eksamenslæsning kan eleven koncentrere sig om at læse den egentlige tekst.

- Øvelser og eksperimenter er markeret med en blå linje i margen.
- Eksempler er markeret med grønt, og opgaver er markeret med rødt.
- Vigtige definitioner og sætninger er markeret med en sort ramme i teksten.

Arbejdet med forberedelsesmaterialet forudsætter brug af et computerbaseret matematisk værktøjs-program med CAS. I dette materiale omtales det blot som et CAS-værktøj.

Forberedelsesmaterialet er suppleret med to appendikser:
Appendiks A omhandler et eksperiment. Det handler om at prioritere nogle begrænsede ressourcer. Meningen er at opnå en forståelse af, hvad formålet er med lineær programmering.
Appendiks B er en udvidelse af temamaterialets behandling af stoffet. I selve materialet ser vi på optimering som et maksimeringsproblem. I Appendiks B arbejdes med et minimeringsproblem. Elever, der bliver hurtigt færdige med materialet eller har brug for yderligere udfordringer, kan arbejde videre med dette afsnit.

1. Hvad er lineær programmering?

I nogle situationer har man har begrænsede ressourcer til rådighed til fx en produktion. Begrænsningen kan dreje sig om råvarer, om en maskine, som kun kan producere et bestemt antal enheder om dagen, om antal ansatte eller lignende. Man skal tilrettelægge sin produktion, så ressourcerne anvendes på den mest hensigtsmæssige måde.

Eksempel 1

En virksomhed producerer to forskellige slags mobilcovers. Det ene er beregnet til børn og har forskellige tegneseriefigurer på. Det andet er beregnet til voksne og har et diskret mønster. Til begge covers anvendes læder og plastic. Virksomheden får leveret en bestemt mængde læder og plastic om dagen. Spørgsmålet er nu, hvor mange mobilcovers af hver slags virksomheden skal producere om dagen for at anvende mest muligt af materialerne og tjene mest muligt på produktionen.
Vi systematiserer først disse oplysninger i et såkaldt *ressourceskema*. I skemaet angives materialeforbruget til de to mobilcovers og den maksimale mængde materiale, producenten har til rådighed hver dag.

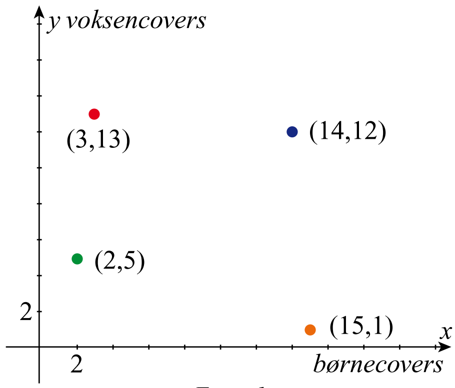
Ressourceskema	Materialeforbrug til et mobilcover til børn	Materialeforbrug til et mobilcover til voksne	Maksimum
Plastic	30 g	15 g	375 g
Læder	30 g	60 g	600 g

Vi kan illustrere produktionen i et koordinat-system (figur1) med antallet af producerede børnecovers på x-aksen og antallet af producerede voksencovers på y-aksen.
Hvert punkt i koordinatsystemet repræsenterer en bestemt sammensætning af produktionen.
Punktet (2,5) repræsenterer en produktion på 2 børnecovers og 5 voksencovers om dagen.
Punktet (14,12) repræsenterer en produktion på 14 børnecovers og 12 voksencovers om dagen og så videre.
På figur 2 er der indtegnet en blå linje.
Linjen har ligningen

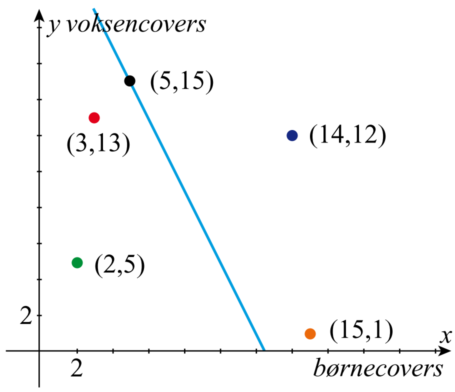
$$30x + 15y = 375 \ .$$

Alle punkterne på denne linje repræsenterer en produktion, som anvender al den plastic, man har til rådighed pr. dag.
Punktet (5,15) repræsenterer en produktion på 5 børnecovers og 15 voksencovers.
Det giver et forbrug af plastic på

$$(30 \cdot 5 + 15 \cdot 15) \text{ g} = 375 \text{ g} \ .$$



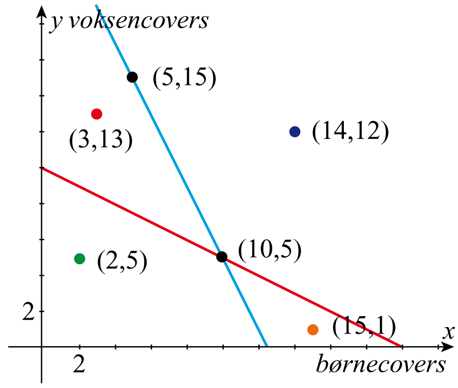
Figur 1



Figur 2

Eksempel 1 (fortsat)

På figur 3 er indtegnet en rød linje. Alle punkterne på denne linje repræsenterer en produktion, som anvender alt det læder, man har til rådighed pr. dag.
Punktet (10,5) ligger både på den røde og den blå linje og repræsenterer en produktion på 10 børnecovers og 5 voksencovers. Denne produktion anvender al den plastic og alt det læder, man har til rådighed pr. dag.



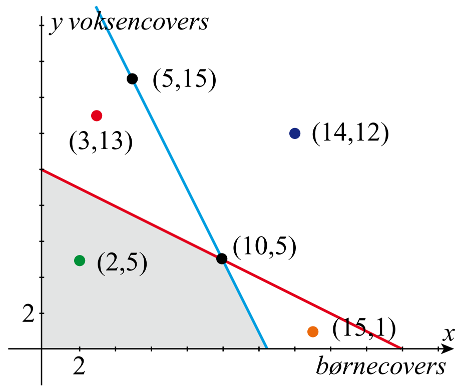
Figur 3

Øvelse 1 (fortsættelse af eksempel 1)

Beregn, hvor meget plastic og læder der anvendes ved de produktioner, der er repræsenteret ved punkterne (2,5), (3,13), 14,12) og (15,1). Hvilke af disse produktioner er mulige med de materialer man har til rådighed?

Eksempel 1 (fortsat)

I figur 4 er et område markeret med gråt.
Alle punkterne i dette område repræsenterer sammen med områdets blå og røde kant en produktion, der kan lade sig gøre med den materialemængde, man har til rådighed pr. dag.
Punktet (10,5) repræsenterer en produktion, der udnytter begge materialer fuldt ud.
Ved at producere 10 børnecovers og 5 voksencovers har man så fået mest muligt ud af de begrænsede ressourcer, som her er en begrænset mængde plastic og læder. Man har optimeret produktionen.



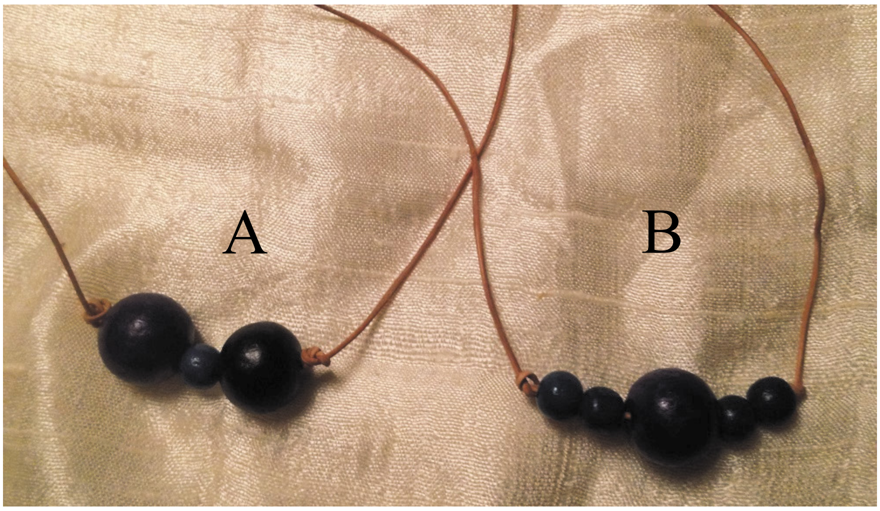
Figur 4

Lineær programmering handler om at analysere denne type af situationer.
I den forbindelse har ordet ”programmering” intet med computere at gøre.
Det handler om skemaer og systemer. Ligesom ”TV-program”.
I det følgende afsnit ser vi på en tilsvarende problemstilling.

2. Begrænsede ressourcer

Eksempel 2

Et smykkeværksted laver to slags halssmykker med perler.



Til den ene type (A) anvender de 2 store og 1 lille perle, og til den anden type (B) anvender de 1 stor og 4 små perler.
De har 1200 store perler og 2000 små perler til rådighed om dagen.
Som i eksempel 1 kan vi opstille et ressourceskema over disse oplysninger.

Ressourceskema	Antal type A	Antal type B	Maksimum
Store perler	2	1	1200
Små perler	1	4	2000

Nu ønsker vi at undersøge, hvilken kombination af de to smykker der giver værkstedet mulighed for at bruge alle perlerne.
Hvis x er antallet af smykker af type A, og y er antallet af smykker af type B, skal der bruges $2x + y$ store perler om dagen. Da de har en *begrænsning* på 1200 store perler om dagen, må $2x + y$ altså højst være 1200. Det gælder naturligvis også, at x og y skal være ikke-negative tal.
Hvis de bruger alle perlerne, så gælder ligningen $2x + y = 1200$.
Tilsvarende skal der bruges $x + 4y$ små perler om dagen.
Begrænsningen er her 2000 små perler om dagen. Også her gælder, at x og y skal være ikke negative tal.
Hvis de bruger alle perlerne, så gælder ligningen $x + 4y = 2000$.
Vi har nu formuleret situationen i et matematisk sprog.

Opgave 1

En virksomhed producerer foder til vilde fugle.
Der produceres to slags, Musvitblanding og Spurveblanding.
Der anvendes to slags frø, hampefrø og solsikkefrø.
Virksomheden har 240 kg hampefrø og 180 kg solsikkefrø til rådighed.
Til en pose Musvitblanding bruger virksomheden 0,1 kg hampefrø og 0,15 kg solsikkefrø.
Til en pose Spurveblanding bruger virksomheden 0,2 kg hampefrø og 0,1 kg solsikkefrø.

a) Udfyld nedenstående ressourceskema:

Ressourceskema	Musvitblanding	Spurveblanding	Maksimum
Hampefrø			
Solsikkefrø			

Virksomheden producerer x poser Musvitblanding og y poser Spurveblanding.

b) Opstil ligningerne for det maksimale forbrug af hver slags frø.

Opgave 2

I en børnehave skal de bage boller til en udflugt for alle børnene.
De bager to slags: rugmelsboller og grovboller.
De har 9,5 kg rugmel og 13 kg hvedemel.
Til en portion rugmelsboller bruger de 0,5 kg hvedemel og 1 kg rugmel.
Til en portion grovboller bruger de 1 kg hvedemel og 1 kg rugmel.

a) Opstil et ressourceskema for situationen.

De bager x portioner rugmelsboller og y portioner grovboller.

b) Opstil ligningerne for det maksimale forbrug af hver slags mel.

Opgave 3

En virksomhed producerer to slags postkort: et stort med teksten ”Til lykke med fødselsdagen” og et lille med et billede af en lagkage.
Der produceres x store kort og y små kort.
I produktionen indgår to materialer: tryksværte og papir.
Det maksimale forbrug af disse materialer kan beskrives med ligningerne:

Maksimalt forbrug af tryksværte (målt i gram): $0,2x + 0,5y = 500$
Maksimalt forbrug af papir (målt i gram): $15x + 10y = 14000$.

a) Opstil et ressourceskema for denne produktion.

b) Giv en sproglig fortolkning af begrænsningerne.

3. Uligheder

I de eksempler, vi har set på indtil nu, har der været nogle begrænsninger på ressourcerne. Det vil sige, at et udtryk skal være mindre/større end eller lig med et bestemt tal. I det følgende ser vi på den matematiske formulering af dette.

Definition

En *ulighed* indeholder et af de to ulighedstegn:
$\leq$ betyder "mindre end eller lig med"
$\geq$ betyder "større end eller lig med".

I dette materiale vil x og y altid betegne en mængde eller et antal.
Vi vil derfor overalt forudsætte, at de er ikke-negative tal, dvs. $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

Eksempel 3

Vi ser på uligheden $2x+3 \leq 7$. Vi undersøger, om nogle forskellige tal er løsninger til uligheden.
$x=0$ er en løsning, fordi $2 \cdot 0+3=3$, og 3 er mindre end eller lig med 7.
$x=2$ er også en løsning, fordi $2 \cdot 2+3=7$, og 7 er mindre end eller lig med 7.
$x=3$ er ikke en løsning, fordi $2 \cdot 3+3=9$, og 9 er større end 7.

At løse en ulighed som $2x+3 \leq 7$ vil sige at bestemme samtlige værdier af x, der gør uligheden sand. Uligheder kan have mange løsninger.

I lineær programmering ser vi på uligheder med *to* variable x og y.
At løse en ulighed som $2x+3y \leq 20$ vil sige at bestemme samtlige talpar $(x,\ y)$, der gør uligheden sand.
Talparret $(x,\ y)=(3,\ 4)$ gør uligheden $2x+3y \leq 20$ sand, fordi $2 \cdot 3+3 \cdot 4=18$, og 18 er mindre end 20.

Definition

En ulighed af typen $2x+3y \leq 20$ kaldes for en *lineær ulighed i to variable.*

I de følgende øvelser ser vi eksempler på sådanne uligheder.

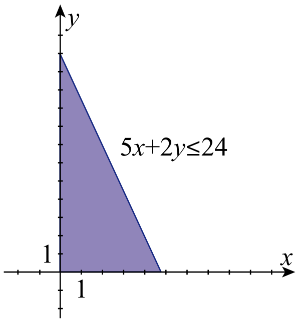
Øvelse 2

Undersøg, om talparret gør uligheden $5x+2y \leq 24$ sand.

a) $(2,\ 6)$ b) $(3.1,\ 5.2)$ c) $(8,\ 5)$

Løsninger til lineære uligheder med to variable kan ikke skrives op som intervaller, fordi løsningerne er talpar. De kan i stedet illustreres i et koordinatsystem, hvor talparrene er koordinater til punkter.
På figur 5 er indtegnet løsningsmængden for uligheden $5x+2y\leq 24$.

Ethvert punkt i det blå område har et koordinatsæt, som gør uligheden sand. Fx vil koordinatsættet til punktet (1,2) gøre uligheden sand, fordi $5\cdot 1+2\cdot 2=9$, og 9 er mindre end 24.



Figur 5

Vi vil ikke altid skelne mellem et punkt og dets koordinatsæt. Punkter, hvis koordinatsæt er løsning til en ulighed, vil ofte blive omtalt som løsninger til uligheden.

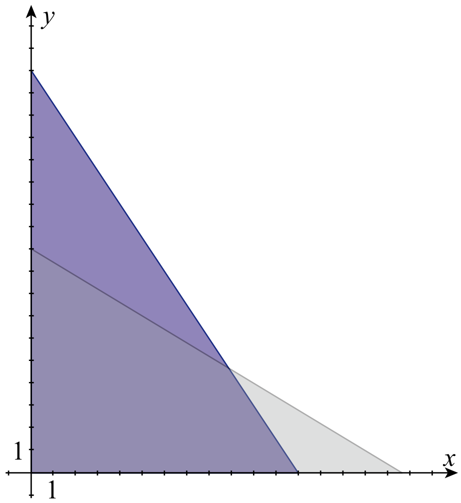
Øvelse 3

Tegn figur 5 med et CAS-værktøj.

På figur 6 er tegnet de områder, som indeholder løsningerne til ulighederne

$$3x+2y\leq 36 \text{ og } 3x+5y\leq 50 .$$

Det er yderligere sat som en betingelse, at x og y er ikke-negative tal.
Punkterne, der ligger i det område, hvor den blå og den grå figur overlapper hinanden, er løsninger til begge de to uligheder og opfylder betingelserne om, at x og y er ikke-negative tal.
Der er altså fire krav, der fastlægger det overlappende område.



Figur 6

Definition

Områder, der indeholder de punkter, som er løsninger til flere lineære uligheder, kaldes for *polygonområder*.

Øvelse 4

Tegn med CAS-værktøjet det polygonområde, der opfylder følgende uligheder.
Husk, at både x og y er ikke negative tal.

a) $2x+3y\leq 5$ og $x+4y\leq 4$.

b) $12x+3y\leq 50$ og $2x+10y\leq 40$.

4. Polygonområder

Den grafiske illustration af uligheder, som er gennemgået i kapitel 3, udnytter vi nu til at give en grafisk fremstilling af de begrænsninger, som fx en produktion har.

Eksempel 4

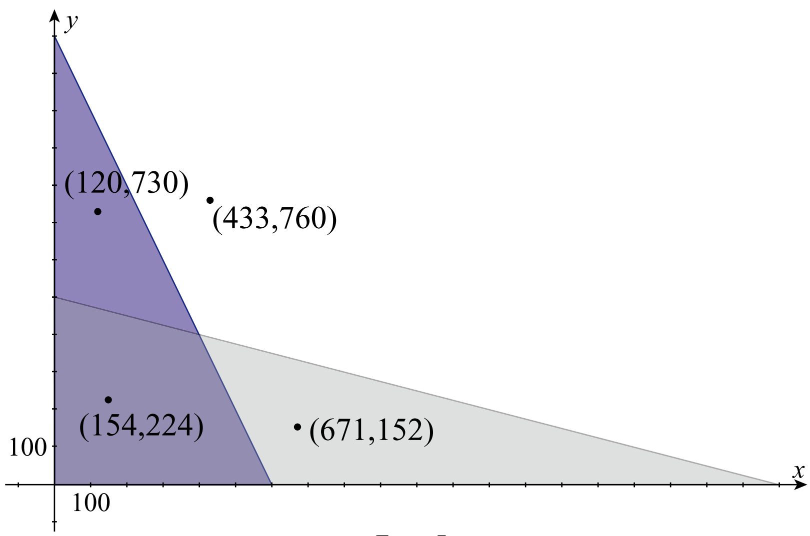
Vi vender tilbage til smykkeværkstedet fra eksempel 2. Ressourceskemaet ses herunder.

Ressourceskema	Antal type A	Antal type B	Maksimum
Store perler	2	1	1200
Små perler	1	4	2000

Begrænsningerne var 1200 store og 2000 små perler. Vi kan nu opstille følgende uligheder:

$$2x + y \leq 1200 \quad \text{og} \quad x + 4y \leq 2000 \ ,$$

hvor x er antallet af producerede smykker af type A, og y er antallet af smykker B.
Vi sætter desuden den begrænsning, at både x og y skal være ikke-negative tal.



Figur 7

Figur 7 viser ulighederne indtegnet i værktøjsprogrammet.
Punktet (154, 224) angiver, at der er solgt 154 smykker af type A og 224 af type B.

Øvelse 5 (fortsættelse af eksempel 4)

a) Beregn, hvor mange store og små perler der er brugt i den produktion, der svarer til punktet (154, 224).

b) Beregn, hvor mange store og små perler der ville blive brugt i en produktion, der svarer til de øvrige punkter på figuren.

c) I hvilket område på figuren findes de punkter, der svarer til en produktion, der kan lade sig gøre med de oplyste begrænsninger?

Opgave 4

På lageret i et snedkerværksted pakker man borde og stole til transport.
Ressourceskemaet ses herunder.

Ressourceskema	Bord	Stol	Maksimum
Lagerplads i m^3	3	1	50
Arbejdstid (minutter) til pakning	10	10	500

a) Indfør passende variable, og opstil ulighederne for begrænsningerne på lagerets arbejde.

b) Indtast ulighederne i CAS-værktøjet, så polygonområdet bliver markeret.

Opgave 5

Et transportfirma kører med bilmotorer og dæk.
En motor vejer 350 kg. Et dæk vejer 15 kg.
Firmaet må ikke læsse mere end 5000 kg ind i lastbilen.
En motor fylder 1 kubikmeter. Et dæk fylder 0,2 kubikmeter.
Firmaet kan ikke læsse mere end 20 kubikmeter ind i lastbilen.

a) Opstil et ressourceskema for situationen.

b) Indfør passende variable, og opstil ulighederne for begrænsningerne.

c) Indtast ulighederne i værktøjsprogrammet, således at polygonområdet er markeret.

Opgave 6

En virksomhed producerer to varer A og B.
Til begge varer anvendes en vis mængde råvarer og et antal arbejdstimer.

Begrænsningerne kan formuleres med ulighederne:

$$4x + 2y \leq 80$$
$$2x + 5y \leq 120\,,$$

hvor den første begrænsning handler om mængden af råvarer, målt i ton, som virksomheden kan få leveret om ugen. Den anden begrænsning handler om det antal arbejdstimer, som virksomhedens ansatte arbejder om ugen med produktionen af de to varer. Der produceres x enheder om ugen af vare A og y enheder om ugen af vare B.

a) Hvad fortæller ulighederne om ressourceforbruget og begrænsningerne?

b) Opstil et ressourceskema for situationen.

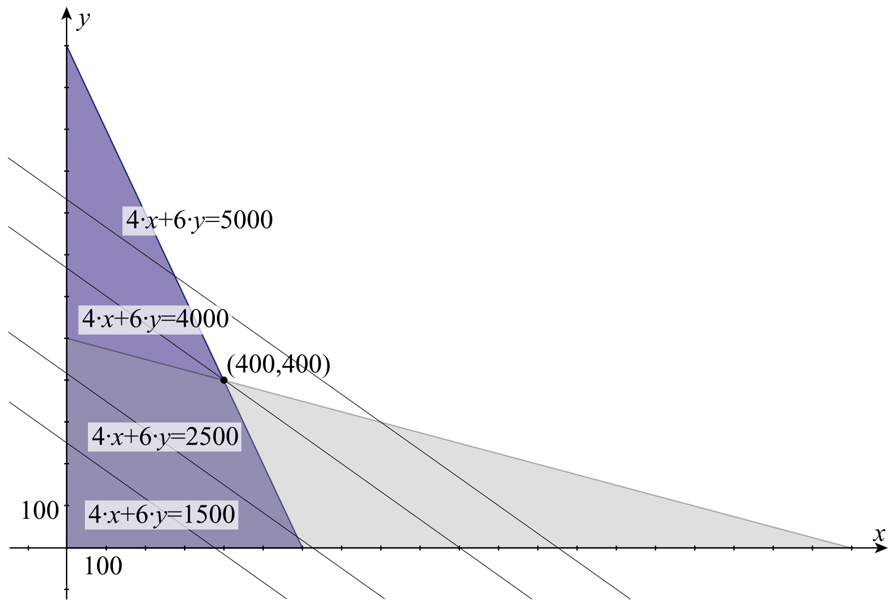
5. Optimering

Eksempel 5

Vi arbejder videre med smykkeværkstedet (eksempel 2 og 4). Vi vil undersøge, hvor mange smykker af hver slags værkstedet skal producere og sælge for at få den størst mulige fortjeneste. På smykke A har værkstedet en fortjeneste på 4 kr. og på smykke B en fortjeneste på 6 kr. Ressourceskemaet udvides nu med oplysningerne om fortjenesten på de to forskellige smykker.

Udvidet ressourceskema	Antal type A	Antal type B	Maksimum
Store perler	2	1	1200
Små perler	1	4	2000
Fortjeneste pr. smykke	4 kr.	6 kr.	

Vi kan beregne fortjenesten N ved formlen $N = 4x + 6y$, hvor x betegner antallet af smykker af type A, og y betegner antallet af smykker af type B. Vi kalder N for *kriteriefunktionen*. Kriteriefunktionens graf for en fast værdi N kalder vi for en *niveaulinje.*
På figur 8 ses niveaulinjerne for $N = 1500, N = 2500, N = 4000$ og $N = 5000$.



Figur 8

Uanset hvilken kombination af smykker vi vælger på linjen med ligningen $4x + 6y = 2500$, vil fortjenesten altså være 2500 kr.
Linjen med ligningen $4x + 6y = 4000$ repræsenterer en fortjeneste på 4000 kr.
Linjen med ligningen $4x + 6y = 5000$ repræsenterer en fortjeneste på 5000 kr. osv.
Vi ser, at niveaulinjerne forskydes opad, når fortjenesten N bliver større.
I det område, hvor den blå og grå figur overlapper hinanden ligger de punkter, der er løsninger til begge ulighederne, og som derfor respekterer begrænsningerne på perlerne.
Linjen med ligningen $4x + 6y = 4000$ går gennem punktet (400, 400). Det er det eneste punkt, som linjen og det overlappende område har fælles. I dette punkt har smykkeværkstedet så den største fortjeneste. Ved at sælge 400 af hver type smykke fås den største fortjeneste 4000 kr.
Vi kalder punktet (400, 400) for *det optimale punkt.*

Definition

Kriteriefunktionen $N = ax + by$ angiver det udbytte, man ønsker at optimere i situationen.

Kriteriefunktionens graf hedder en *niveaulinje*.

Det talpar (x,y), der giver det største udbytte under de givne begrænsninger, betegnes *det optimale punkt*.

Øvelse 6

Nu ser vi igen på virksomheden fra opgave 6.
Vi får den oplysning, at firmaet tjener 300 kr. på vare A, og 200 kr. på vare B. Vi indtaster disse oplysninger i en ny linje i ressourceskemaet og får dermed *et udvidet ressourceskema.*

Udvidet ressourceskema	Vare A	Vare B	Maksimum
Råvarer i tons	4	2	80
Arbejdstimer	2	5	120
Fortjeneste	300	200	

a) Opstil ulighederne for begrænsningerne, og indtast dem i CAS-værktøjet, således at polygonområdet markeres.

b) Opstil kriteriefunktionen. Indtast den i værktøjsprogrammet, og indsæt en skyder, så værdien for kriteriefunktionen N kan varieres. Sæt N til at ligge mellem 0 og 8000. Vælg nu forskellige værdier for N ved at flytte på skyderen, indtil niveaulinjen går gennem hjørnet af polygonområdet.

c) Hvor mange varer af type A og hvor mange varer af type B skal man producere for at få den maksimale fortjeneste?

d) Hvor stor er den maksimale fortjeneste?

e) Undersøg, hvilken fortjeneste man maksimalt kunne få, hvis man kun producerede den ene af de to typer varer.

Metode

Man kan altid finde en optimal værdi for *kriteriefunktionen* N i et hjørne af polygonområdet.
En metode til at løse optimeringsopgaver er derfor at starte med at tegne polygonområdet.
Dernæst afsøger man alle hjørnerne i polygonområdet.
Til sidst bestemmer man ved indsætning det af hjørnerne, der optimerer værdien af kriteriefunktionen N.

Eksempel 6

På figur 9 ses et polygonområde for et firmas produktion af to legetøjsdyr, løve og elefant. Koordinaterne for polygonområdets hjørner er angivet på figuren.
Firmaets fortjeneste på en løve er 25 kr., og fortjenesten på en elefant er 37 kr.

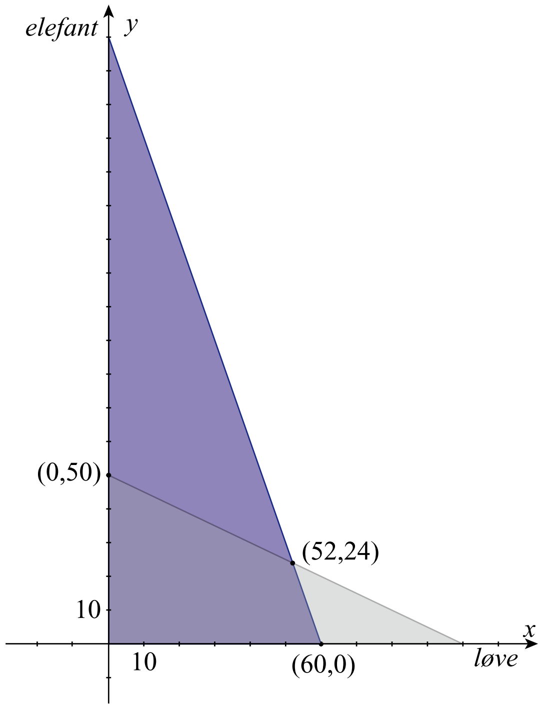
Antallet af løver betegnes x og antallet af elefanter y. Vi kan nu opstille kriteriefunktionen:

$N = 25x + 37y$.

Næste skridt er indsættelse af koordinatsættene for de tre af de fire hjørner. Vi udelader punktet (0,0).

$(x,\ y) = (0,\ 50): \quad N = 25 \cdot 0 + 37 \cdot 50 = 1850$
$(x,\ y) = (52,\ 24): \quad N = 25 \cdot 52 + 37 \cdot 24 = 2188$
$(x,\ y) = (60,\ 0): \quad N = 25 \cdot 60 + 37 \cdot 0 = 1500$.

Vi kan nu se, at det optimale punkt er (52,24), og at den maksimale fortjeneste er 2188 kr.



Figur 9

Opgave 7 (fortsættelse af opgave 1)

En virksomhed producerer foder til vilde fugle.
Der produceres to slags foder, Musvitblanding og Spurveblanding.
Der anvendes to slags frø, hampefrø og solsikkefrø.
I nedenstående udvidede ressourceskema ses ressourceforbruget, begrænsningerne på ressourcerne og fortjenesten på de to typer foder.

Udvidet ressourceskema	Antal poser Musvitblanding	Antal poser Spurveblanding	Maksimum
Hampefrø i kg	0,1	0,15	240
Solsikkefrø i kg	0,2	0,1	180
Fortjeneste pr. pose i kr.	10	14	

Begrænsningerne kan beskrives med ulighederne:

$$0{,}1x + 0{,}15y \le 240$$
$$0{,}2x + 0{,}1y \le 180 \ .$$

a) Opstil kriteriefunktionen.

b) Bestem polygonområdet grafisk, og bestem koordinatsættet til hvert af hjørnerne.

c) Bestem den produktion, der giver virksomheden størst indtjening.

6. Flere end to begrænsninger

Når der kun er to begrænsede ressourcer, vil hjørnerne være der, hvor linjerne skærer hinanden eller der, hvor linjerne skærer en af koordinatsystemets akser.
Tilsvarende gælder, hvis der er flere end to begrænsninger. Så vil der bare være flere hjørner.
Det ser vi et eksempel på i dette kapitel.

Eksempel 7

Figur 10 viser polygonområdet i et eksempel, hvor der er tre begrænsninger. Begrænsningerne kan beskrives med ulighederne:

$$2x + 5y \le 35$$
$$x + y \le 10$$
$$2x + y \le 18 \,.$$

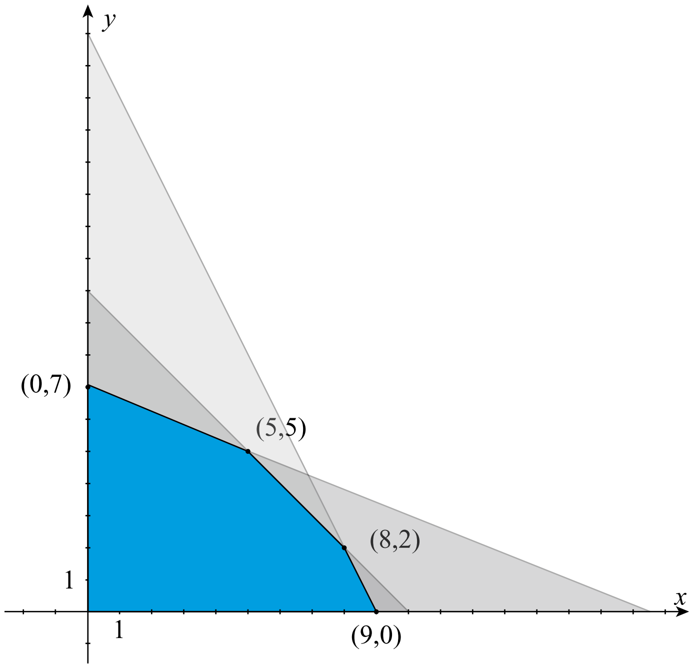
På figur 10 kan vi se, at der er fire hjørner i polygonområdet:

(0, 7)

(5, 5)

(8, 2)

(9, 0).



Figur 10

Øvelse 7 (fortsættelse af eksempel 7)

Det oplyses, at kriteriefunktionen er givet ved $N = 4x + y$.

a) Beregn værdien for kriteriefunktionen N i hvert af de fire hjørner af polygonområdet.

b) Bestem det optimale punkt. Hvilken værdi har N i det optimale punkt?

Øvelse 8 (fortsættelse af eksempel 7)

Det oplyses, at kriteriefunktionen er givet ved $N = 3x + 2y$.

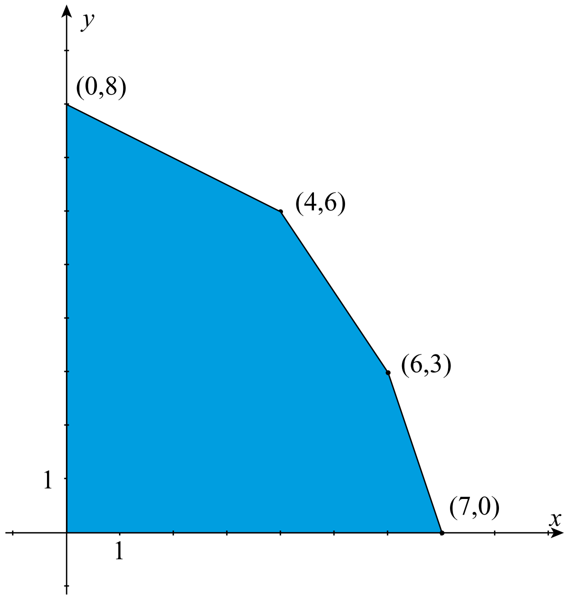
a) Beregn værdien for kriteriefunktionen N i hvert af de fire hjørner af polygonområdet.

b) Bestem det optimale punkt. Hvilken værdi har N i det optimale punkt?

Opgave 8

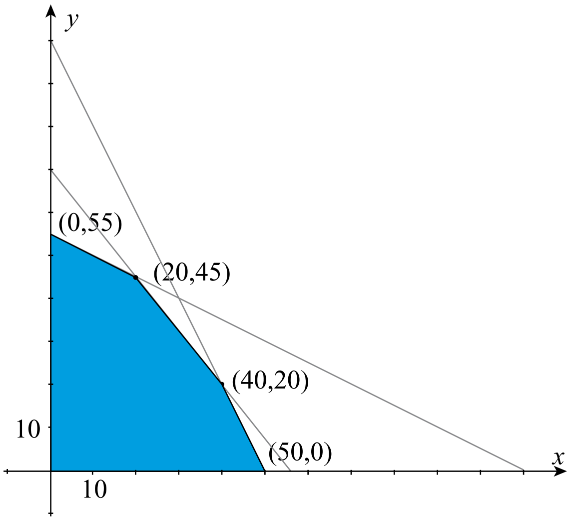
Figur 11 viser et polygonområde, hvor hjørnernes koordinater er angivet.
En kriteriefunktion er givet ved $N = x + y$.

a) Bestem den største værdi af N inden for polygonområdet.



Figur 11

Opgave 9



Figur 12

Et stort lager har to forskellige gaffeltrucks A og B.
x angiver antal ture med gaffeltruck A, og y angiver antal ture med gaffeltruck B.
Begrænsningerne er, at de to gaffeltrucks kører med forskellig hastighed, bruger forskellig mængde diesel og har forskellige udgifter til vedligeholdelse.
Grafen viser polygonområdet for det mulige antal ture på en arbejdsdag.
Lageret ønsker at transportere mest muligt gods på en arbejdsdag.
Gaffeltruck A kan laste 6000 kg pr. tur. Gaffeltruck B kan laste 4000 kg pr. tur.

a) Opstil kriteriefunktionen, og bestem den maksimale mængde gods, der kan transporteres på en arbejdsdag.

Optimering med lineær programmering - sådan gør man

1. Fastlæg de to uafhængige variable x og y.
2. Formulér begrænsningerne for de involverede ressourcer som uligheder (samt $x \geq 0,\ y \geq 0$).
3. Indtast ulighederne i et værktøjsprogram, og bestem polygonområdet.
4. Opstil kriteriefunktionen $N = a \cdot x + b \cdot y$.
5. Bestem det optimale punkt ved at indsætte koordinaterne for polygonområdets hjørner i kriteriefunktionen.
6. Formulér en løsning på optimeringen, dvs. hvilke værdier for x og y der fastlægger det optimale punkt, og hvilken værdi N har i det optimale punkt.

7. Følsomhedsanalyse

Følsomhedsanalyse drejer sig om at undersøge, hvor meget man kan ændre koefficienterne til x og y i kriteriefunktionen, før det optimale punkt skifter til et andet sted i polygonområdet.
I de følgende 2 eksperimenter arbejdes der med smykkeværkstedet igen (eksempel 2, 4 og 5). Vi vil undersøge, hvor meget fortjenesten på smykke A kan ændre sig, før det kan betale sig for firmaet at lægge produktionen om.

Øvelse 9 (Eksperiment)

a) Tegn de to begrænsninger givet ved ulighederne $2x + y \leq 1200$ og $x + 4y \leq 2000$.

b) Tegn niveaulinjer $N = 4 \cdot x + 6 \cdot y$, hvor N gøres til en skyder, der går fra 0 til 5000.
Bestem det optimale punkt.

Nu falder fortjenesten for smykke A til 3 kr.

c) Tegn niveaulinjer med ligningen $N = 3 \cdot x + 6 \cdot y$, hvor N stadig justeres med en skyder.
Hvor kommer det optimale punkt til at ligge denne gang?

d) Eksperimentér: Hvor lille skal fortjenesten på smykke A være, før det optimale punkt kommer til at ligge et andet sted?

e) Gå den modsatte vej: Hvor stor skal fortjenesten på smykke A være, før det optimale punkt kommer til at ligge et tredje sted?

Øvelse 10 (Eksperiment)

a) Tegn de to begrænsninger givet ved ulighederne $2x + y \le 1200$ og $x + 4y \le 2000$.

b) Tegn en niveaulinje, som er låst fast til det optimale punkt (400, 400), og justér fortjenesten a på smykke A med en skyder.
Vink: Det kan gøres ved at tegne relationen $a \cdot x + 6 \cdot y = a \cdot 400 + 6 \cdot 400$.
Venstresiden er kriteriefunktionen med variabel fortjeneste a.
Højresiden låser niveaulinjen til punktet (400, 400).
Lad skyderen a gå fra 0 til 20 med en skridtlængde på 0,1.

c) Hvor lille skal fortjenesten a på A være, før det optimale punkt skifter fra (400,400) til et andet punkt?

d) Hvor stor skal fortjenesten på A være, før det optimale punkt skifter fra (400, 400) til et andet punkt?

Eksperimenterne viser, at (400, 400) er det optimale punkt, indtil vi ændrer kriteriefunktionen så meget, at niveaulinjerne bliver parallelle med en af de linjer, der afgrænser polygon-området. Analyserne viser, at så længe fortjenesten på smykke A er mellem 1,50 kr. og 12 kr., så opnår virksomheden den maksimale indtjening ved at producere 400 af hver slags.

Definition

Efter at have fundet det optimale punkt kan man med en *følsomhedsanalyse* undersøge, hvor meget man kan ændre på koefficienterne til x og y og samtidig fastholde det optimale punkt.

Det vil fx sige, hvor meget man kan ændre fortjenesten på smykke A eller B og stadig opnå den maksimale fortjeneste med en produktion på 400 smykker af hver slags.

Metode

For at kunne udføre en følsomhedsanalyse i praksis er det nødvendigt at kunne finde hældningen af en niveaulinje og en begrænsende linje. Det kan gøres ved at isolere y i kriteriefunktionen og i ligningen for en begrænsende linje.

Øvelse 11

Isolér y ved at bruge ligningsløseren i CAS-værktøjet. Angiv derefter hældningen for hver af linjerne.

a) $2x + 5y = 12$ b) $-4x + 2y = 10$ c) $6x - 3y = 20$.

Eksempel 8

Vi ser igen på smykkeværkstedet (jf. eksperimenterne i øvelse 9 og 10).
Vi skal undersøge, hvor meget fortjenesten på smykke A kan variere, uden at det optimale punkt flytter sig.
Fortjenesten på smykke B fastholdes på 6 kr. og fortjenesten på smykke A sættes til a kr.
Så får vi kriteriefunktionen $N = a \cdot x + 6 \cdot y$.

I denne ligning isoleres y, og vi får $y = -\frac{a}{6} \cdot x + \frac{N}{6}$, dvs. hældningen er $-\frac{a}{6}$.

Den ene begrænsning er givet ved uligheden $2x + y \leq 1200$. Vi isolerer y i ligningen $2x + y = 1200$ og får $y = -2x + 1200$, så denne linjes hældningskoefficient er -2.
For at bestemme a i dette tilfælde sætter vi de to hældninger lig med hinanden og løser ligningen med hensyn til a:

$$-\frac{a}{6} = -2 \Leftrightarrow a = 12 .$$

Den anden begrænsning er givet ved uligheden $x + 4y \leq 2000$. Vi isolerer y i ligningen $x + 4y = 2000$ og får $y = -\frac{1}{4} \cdot x + 500$, så denne linjes hældningskoefficient er $-\frac{1}{4}$.
Igen sætter vi de to hældninger lig hinanden og løser med hensyn til a:

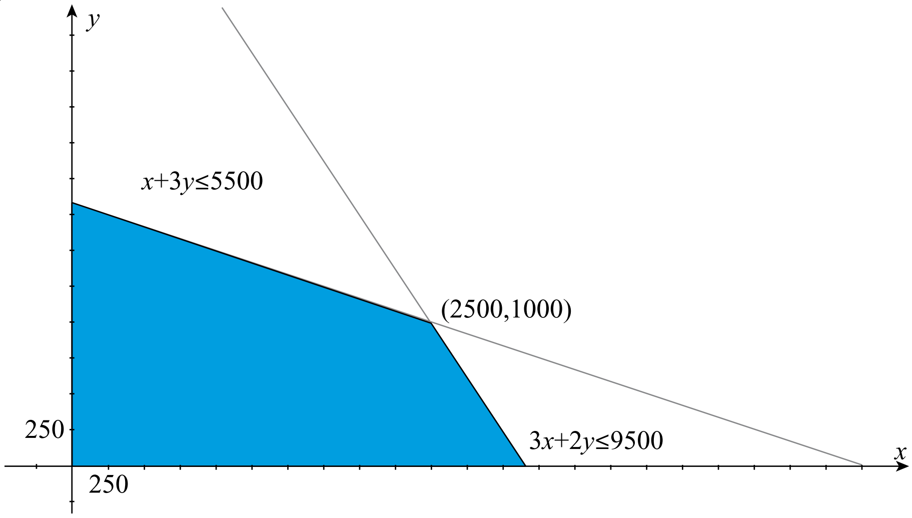
$$-\frac{a}{6} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2} = 1{,}5 .$$

Hermed har vi beregnet, at fortjenesten på smykke A kan variere fra 1,5 kr. til 12 kr. uden at produktionen skal omlægges fra at producere 400 smykker af hver slags.

Øvelse 12

Fasthold fortjenesten på smykke A på 4 kr., og sæt fortjenesten på smykke B til b kr.
Vis, at b kan variere mellem 2 kr. og 16 kr., uden at produktionen skal omlægges.

Opgave 10



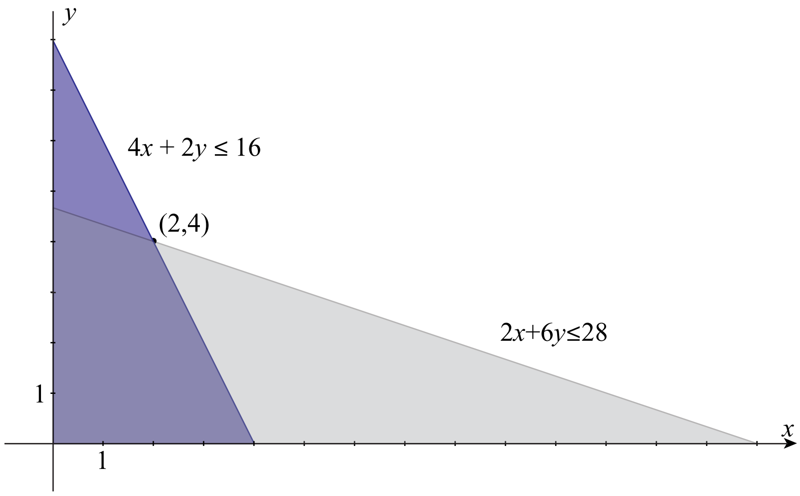
Figur 13

En fabrik producerer dagligt x eksemplarer af en vare A og y eksemplarer af en vare B. Grafen viser polygonområdet for produktionen.

Fabrikken tjener 8 kr. pr. eksemplar af vare A, og 10 kr. pr. eksemplar af vare B. Fabrikken tjener flest penge, hvis der produceres 2500 eksemplarer af vare A og 1000 eksemplarer af vare B.

a) Udfør en følsomhedsanalyse for at afgøre, hvor meget indtjeningen på vare A skal ændre sig, før det kan betale sig at lægge produktionen om.

Opgave 11



Figur 14

Figuren viser polygon-området i en optimeringsopgave. Begrænsningerne er givet ved:

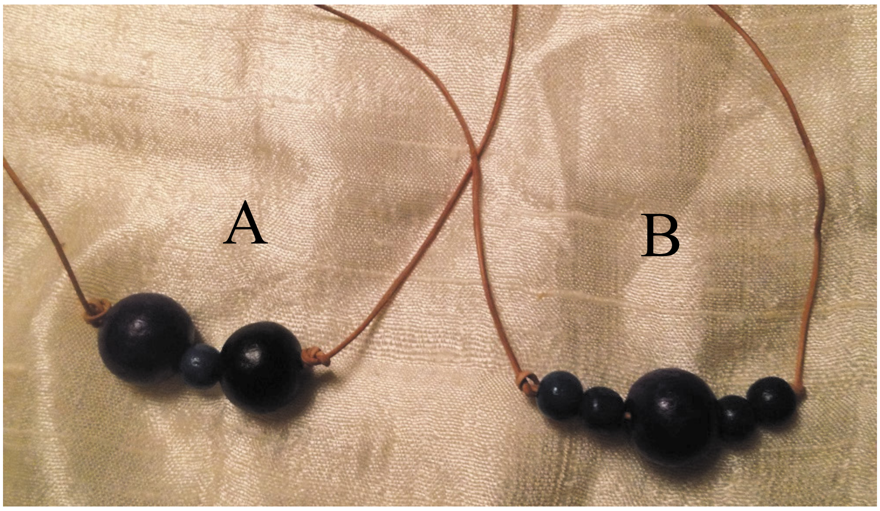
$$4x+2y\le 16 \text{ og } 2x+6y\le 28 .$$

Det oplyses, at kriteriefunktionen $N=a\cdot x+4y$ har maksimum inden for polygonområdet i det optimale punkt (2,4).

a) Udfør en følsomhedsanalyse for a i kriteriefunktionen.

Appendiks A : Et eksperiment

I dette afsnit skal vi eksperimentere med at opnå det bedste resultat med begrænsede ressourcer.



En pige laver smykker med perler. Hun laver to forskellige slags af nogle store og små perler.
Til den ene type (A) anvender hun 2 store og 1 lille perle, og til den anden type (B) anvender hun 1 stor og 4 små perler.
Hun har 12 store og 20 små perler.

I øvelse A1 og A2 skal man prøve sig frem med rigtige perler, kugler eller lignende.

Øvelse A1

a) Hvis hun laver 3 smykker af type A, kan hun så lave 4 af type B?

b) Hvis hun laver 4 smykker af type B, kan hun så lave 4 af type A?

Øvelse A2

I skemaet angiver det røde kryds 2 smykker af type A og 3 af type B.

a) Sæt et kryds for alle de mulige kombinationer af smykker, hun kan lave.

Antal B

5							
4							
3		×					
2							
1							
	1	2	3	4	5	6	7

Antal A

Øvelse A3

a) Hvor mange store perler har hun brugt, hvis hun laver 2 smykker af type A og 3 smykker af type B?

b) Opstil en formel til beregning af det antal store perler, hun har brugt, hvis x er antal smykker af type A, og y er antal smykker af type B.

c) Hvor mange små perler har hun brugt, hvis hun laver 2 smykker af type A og 3 af type B?

d) Opstil en formel til beregning af det antal små perler, hun har brugt, hvis x er antal smykker af type A, og y er antal smykker af type B.

Øvelse A4

Pigen kan få en fortjeneste på 4 kr. for type A og 6 kr. for type B.

a) Hvilken fortjeneste kan hun få, hvis hun sælger 2 smykker af type A og 3 af type B?

b) Hvilken fortjeneste kan hun få, hvis hun sælger 5 smykker af type A og 2 af type B?

Hun sælger x smykker af type A og y af type B.

c) Opstil en formel til beregning af den samlede fortjeneste på smykkerne.

Øvelse A5

a) Hvor mange smykker af hver slags skal pigen sælge for at få den størst mulige fortjeneste?

Appendiks B : Et minimeringsproblem

Hidtil har vi kun ledt efter maksimum, men metoden kan også bruges til at minimere kriteriefunktioner.

Eksempel B1

En studerende vil leve af skyr og Choko-morgenmad.
Den studerende vil leve så billigt som muligt. Hvordan skal kosten sammensættes?
Herunder ses et ressourceskema for situationen.

Udvidet ressourceskema	Skyr	Choko-morgenmad	Minimum
Proteinindhold pr. 100 g	11	5	80
Kcal pr. 100 g	86	287	2000
Pris i kr. pr 100 g	2,50	7,00	

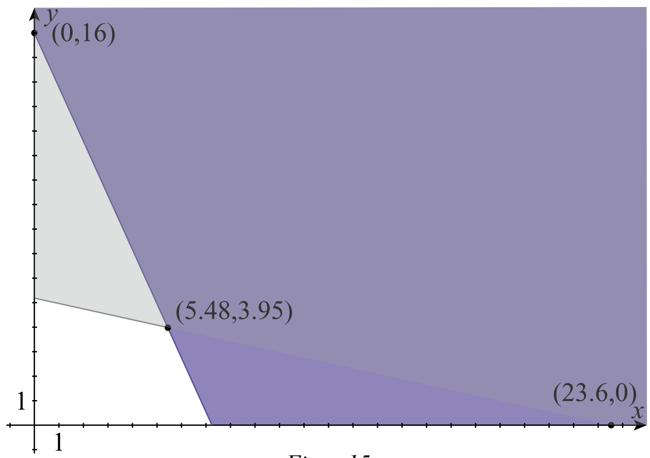
x betegner det antal 100 g skyr, som den studerende spiser, og y betegner det antal 100 g choko-morgenmad, som den studerende spiser.

Vi opstiller ulighederne og tegner polygon-området

Protein: $11 \cdot x + 5 \cdot y \geq 80$
kcal: $86 \cdot x + 387 \cdot y \geq 2000$.

Polygonområdet er det mørke område i øverste højre hjørne.
Den studerende må gerne spise mere end 80 g protein.
På figur 15 aflæses hjørnerne af polygon-området:

(0, 16)
(5.48, 3.95)
(23.6, 0) .



Figur 15

(0, 16) svarer til, at den studerende udelukkende lever af Choko-morgenmad.
(5.48, 3.95) svarer til, at den studerende spiser 548 g skyr og 395 g Choko-morgenmad.
(23.6, 0) svarer til, at den studerende udelukkende lever af skyr.
En af de 3 muligheder er den billigste.
Vi indsætter i kriteriefunktionen $N = 2{,}5 \cdot x + 7 \cdot y$ og beregner udgiften i de 3 punkter.

$(x,\ y) = (0{,}16):$ $\quad N = 2{,}5 \cdot 0 + 7 \cdot 16 = 112$ kr.
$(x,\ y) = (5.48,\ 3.95):$ $\quad N = 2{,}5 \cdot 5{,}4769 + 7 \cdot 3{,}9509 = 41{,}35$ kr.
$(x,\ y) = (23.6,\ 0):$ $\quad N = 2{,}5 \cdot 23{,}6 + 7 \cdot 0 = 59$ kr.

Hvis den studerende skal leve billigst muligt, skal der altså spises ca. 548 g skyr og 395 g choko-morgenmad om dagen. Og den mindste samlede udgift bliver 41,35 kr.

Øvelse B1

Der er givet et problem med følgende begrænsninger

$$3x + 3y \geq 9$$
$$4x + 2y \geq 8\,.$$

a) Bestem polygonområdet grafisk, og bestem koordinaterne til alle hjørner.

Antag, at ligningen for niveaulinjerne er $2x + 3y = N$.

b) Bestem den minimale værdi for kriteriefunktionen *N*.

Øvelse B2

Et mejeri fremstiller yoghurt med hindbær og brombær.
Der skal i alt være mindst 500 kg bær i hver produktion.
Hindbær indeholder 0,240 g C-vitamin pr. kg. Brombær indeholder 0,15 g C-vitamin pr. kg.
Firmaet vil have mindst 90 g C-vitamin i hver produktion.

a) Indfør passende variable, opstil et ressourceskema, og opstil begrænsningerne.

Firmaet kan købe hindbær til 20 kr. pr. kg, og brombær til 28 kr. pr. kg.
Firmaet ønsker, at produktionen skal være så billig som muligt.

b) Tegn polygonområdet, og bestem det optimale punkt.

Bærpriserne ændrer sig i løbet af sæsonen.

c) Udfør en følsomhedsanalyse mht. prisen på hindbær.
Bestem det interval, som prisen på hindbær skal ligge i, hvis firmaet ikke skal lægge sin produktion om.