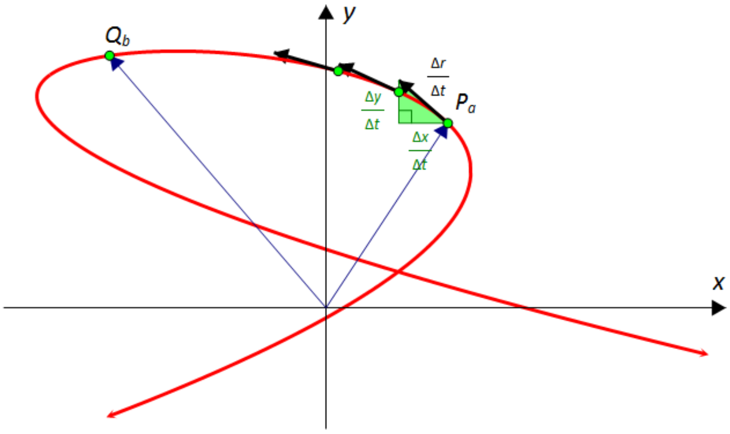
ISBN 9788770668781

Bestemmelse af kurvelænge

Vi betragter en differentiabel vektorfunktion $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ med en kontinuert afledet funktion. Vi vil bestemme længden af banekurven mellem to punkter *P* og *Q*, hvori parameterværdien er henholdsvis *a* og *b*. Ligesom de differentiable reelle funktioners grafer er lokalt lineært er banekurver også lokalt lineære, dvs. vi kan tilnærmelsesvist bestemme længden af banekurven i et givet parameterinterval ved en sum af en række tangentvektorers længde, hvilket netop svarer til at bestemme integralet. Denne sammenhæng mellem summer og integraler er uddybet i kapitel 7 om numeriske metoder.



Giver vi parameteren en lille tilvækst Δt, resulterer det i en tilsvarende lille tilvækst i stedfunktionen:

$$\Delta\vec{r} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\cdot\Delta t = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \end{pmatrix}\cdot\Delta t \qquad \text{forlæng med } \Delta t$$

Vi vil nu lade Δt går mod nul. I hele grænseovergangen gælder:

$$|\Delta\vec{r}| = \left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\cdot\Delta t\right| = \left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|\cdot\Delta t = \left|\begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \end{pmatrix}\right|\cdot\Delta t = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\cdot\Delta t \qquad (*)$$

Når Δt går mod nul får vi:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \to x'(t), \qquad \frac{\Delta y}{\Delta t} \to y'(t) \quad \text{og} \quad \frac{\Delta r}{\Delta t} \to \vec{r}\,'(t) = v(t)$$

Lader vi dt betegne et meget lille (”uendeligt lille”) tidsinterval, så bliver (*) i grænsen til:

$$|d\vec{r}| = |\vec{r}\,'(t)|\cdot dt = \left|\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}\right|\cdot dt = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\cdot dt$$

Ved hjælp af Riemann-integralet kan vi nu summere dette op langs hele kurvestykket og får:

Sætning: Kurvelængde

Lad $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ være en differentiabel vektorfunktion med kontinuert afledet funktion.

Længden af banekurven i parameterintervallet $a \le t \le b$ kan beregnes ved:

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\; dt$$

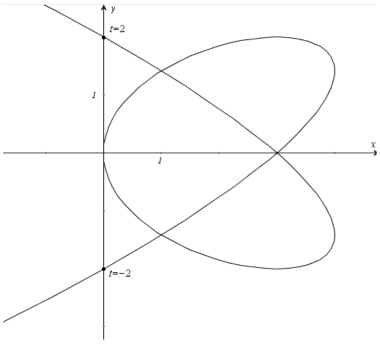
ISBN 9788770668781

L&R Uddannelse
EGMONT

Eksempel

Betragt banekurven for vektorfunktionen:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 4t^2 - t^4 \\ t^3 - 3t \end{pmatrix},\ t \in R$$



Banekurven skærer y-aksen for parameterværdierne $t = -2$ og $t = 2$. (Kontroller det!). Vi vil bestemme banekurvens længde i parameterintervallet $-2 \le t \le 2$, dvs. mellem banekurvens to skæringspunkter med y-aksen ved hjælp af formlen

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt\ .$$

Først bestemmer vi den afledede funktion og dermed koordinatfunktionernes afledede funktioner:

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8t - 4t^3 \\ 3t^2 - 3 \end{pmatrix}.$$

Herefter indsættes disse samt parameterværdierne $t = -2$ og $t = 2$ i formlen for kurvelængden:

$$L = \int_{-2}^{2} \sqrt{(8t - 4t^3)^2 + (3t^2 - 3)^2}\ dt = 21{,}2$$

Konklusion: Kurvelængden i t-intervallet $[-2;2]$ er 21.2.

Øvelse 1

Vi vender tilbage til vektorfunktionen $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 9 - t^2 \\ \frac{1}{4}t^3 - 4t \end{pmatrix}$

a) Hvis du ikke tidligere har gjort det, så bestem dobbeltpunktet.
b) Bestem længden af den lukkede kurve der starter og slutter i dobbeltpunktet.

Øvelse 2

a) Beregn omkredsen af cirklen med parameterfremstilling: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix},\ 0 \le t \le 2\pi$.

B) Beregn omkredsen af ellipsen med parameterfremstilling: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix},\ 0 \le t \le 2\pi$.