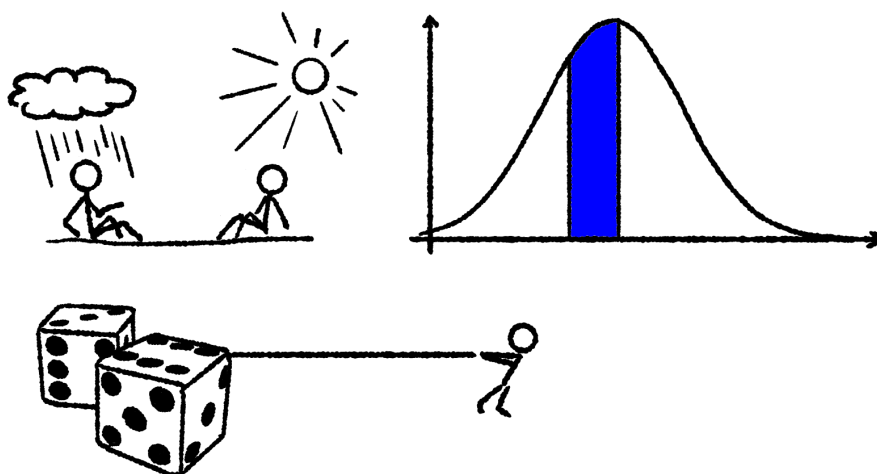


Sandsynlighedsregning

Version 1.0
24. juni 2021



Sandsynlighedsregning

Version 1.0, 2021

Disse noter dækker kernestoffet i sandsynlighedsregning på stx A- og B-niveau efter gymnasireformen 2017.

Enkelte emner fra statistikken er taget med (se afsnittene om binomialtest og stikprøver) da disse bedst kan forklares ud fra sandsynlighedsteoretiske overvejelser.

Enkelte grafer/figurer er markeret med symbolet  der fungerer som link til et interaktivt GeoGebra-arbejdsark. Se også www.geogebra.org.

Disse noter er skrevet til matematikundervisning på stx og må frit anvendes til ikke-kommercielle formål.

Noterne er skrevet vha. tekstformateringsprogrammet $\text{\LaTeX}$, se www.tug.org og www.miktex.org. Figurer og diagrammer er fremstillet i *pgf/TikZ*, se www.ctan.org/pkg/pgf.

Disse og andre noter kan downloades fra www.mathematicus.dk.



Mike Vandal Auerbach, 2021

© 2021 Mike Vandal Auerbach.

Materialet er udgivet under en »Kreditering-Ikkekommerciel-Deling på samme vilkår 4.0 International«-licens (CC BY-NC-SA 4.0).

Indhold

1	Kombinatorik	5
1.1	På hvor mange måder ...?	5
1.2	Permutationer	7
1.3	Kombinationer	8
1.4	Øvelser	9
2	Sandsynlighedsregning	11
2.1	Hvad er sandsynlighed?	11
2.2	Sandsynlighedsfelter	11
2.3	Stokastiske variable	13
2.4	Middelværdi og spredning	15
2.5	Diskrete og kontinuerte sandsynligheder	16
2.6	Øvelser	19
3	Binomialfordelingen	21
3.1	Den generelle formel	22
3.2	Middelværdi og spredning	23
3.3	Binomialtest	24
3.4	Øvelser	28
4	Normalfordelingen	31
4.1	Approximation til binomialfordelingen	33
4.2	Stikprøver	34
4.3	Standardnormalfordelingen	36
4.4	Normalfordelte data	37
4.5	Øvelser	39
	Bibliografi	41

Kombinatorik

1

Sandsynlighedsregning er en gren af matematikken, der beskæftiger sig med den kunst at sætte målbare tal på tilfældige fænomener.

Det kunne f.eks. være

- Resultatet af et kast med en terning.
- Gevinsten på et skrabelod.
- Højden af en tilfældigt valgt person.

Sandsynlighederne er en beskrivelse af, hvor ofte et bestemt udfald af eksperimentet forekommer. F.eks. hvor ofte man får 5'ere i et kast med en terning.

1.1 På hvor mange måder ...?

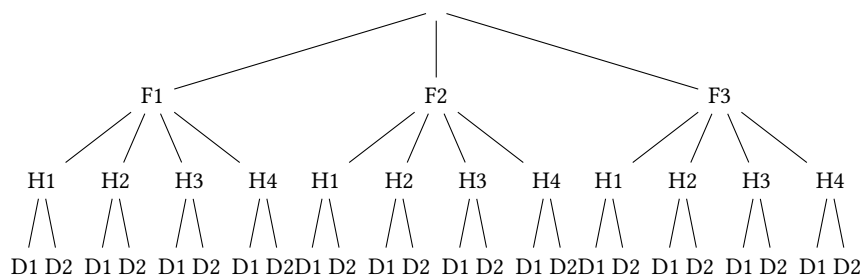
Hvis man skal regne på sandsynligheder, kan det være nyttigt at have formler der gør, at man kan besvare spørgsmålet »på hvor mange måder kan ... lade sig gøre?« Man kan altid tælle sig frem ved at skrive alle mulighederne op, men i praksis kan det blive meget besværligt – især hvis der er mange valgmuligheder.

Man kan starte med følgende konkrete eksempel:

Eksempel 1.1 På en bestemt restaurant kan man vælge mellem 3 forretter, 4 hovedretter og 2 desserter. Hvis en menu består af en forret, en hovedret og en dessert, hvor mange forskellige menuer kan man så sammensætte?

Tegner man et tælletræ over dette vil det se ud som på figur 1.1.

Ved at tælle de nederste grene på træet finder man frem til, at der er 24 forskellige menuer.



Figur 1.1: Et tælletræ over menusammensætning. »F1« er forret nr. 1, »H1« er hovedret nr. 1, osv.

Der er egentlig ikke noget galt i at finde frem til resultatet ved at tegne træer, men opgaven bliver hurtigt uoverskuelig, hvis der er mere end at par enkelte valg, der skal træffes. Man kan i stedet ræsonnere på følgende måde: Der er for hver af de 3 forretter 4 hovedretter at vælge imellem, og for hver af disse er der 2 muligheder for at vælge dessert; det giver i alt

$$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

forskellige menuer.

Udregningen i ovenstående eksempel viser det, man kalder »multiplikationsprincippet«. Her er antallet af muligheder ved hvert *delvalg* (forret, hovedret og dessert) blevet ganget med hinanden. Princippet kaldes også *både-og-princippet*, fordi det skal bruges i tilfælde som dette, hvor man skal vælge *både* en forret *og* en hovedret *og* en dessert. Så man har:

Sætning 1.2: Multiplikationsprincippet

Hvis M består af m elementer, og N består af n elementer, kan man vælge et element fra M og et element fra N på

$$m \cdot n$$

forskellige måder.

Der findes et andet princip, som kaldes *additionsprincippet* – fordi man her lægger sammen. Dette princip skal bruges i følgende situation.

Eksempel 1.3 En fattig studerende kommer ind på restauranten fra forrige eksempel. Han har kun råd til én ret, så han må vælge mellem enten en forret, en hovedret eller en dessert. I den situation er der

$$3 + 4 + 2 = 9$$

muligheder for at vælge en ret, idet der er 9 forskellige retter i alt, og han kun kan vælge én.

Additionsprincippet kaldes også *enten-eller-princippet*, idet der skal vælges *enten* en forret *eller* en hovedret *eller* en dessert.

Man har altså følgende:

Sætning 1.4: Additionssprincippet

Hvis M består af m elementer, og N består af n elementer, kan man vælge et element fra M *eller* et element fra N på

$$m + n$$

forskellige måder.

1.2 Permutationer

Et andet spørgsmål, man kan stille sig selv, handler om at vælge et antal ud af en større mængde. Hvis man f.eks. skal vælge 3 elementer ud af en mængde på 5, hvor mange måder kan det så gøres på?

For at kunne stille en generel formel op, får man brug for noget notation, som gør formlerne nemmere at læse.

Definition 1.5

Hvis n er et naturligt tal, definerer man $n!$,

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

$0!$ defineres til $0! = 1$.

Tallet $n!$ kaldes » n fakultet«.

Eksempel 1.6 Tallet $6!$ er tallet

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

Som man måske kan fornemme, kan $n!$ blive et temmeligt stort tal, selv for små værdier af n .

For at finde frem til et svar på det indledende spørgsmål, kan man analysere følgende eksempel:

Eksempel 1.7 Til en filmaften er der 5 forskellige film, der kunne være interessante at se. Men der er kun tid til at se 3 film, så på hvor mange måder, kan man udvælge de tre film, hvis rækkefølgen ikke er ligegyldig?

I dette tilfælde, er der 5 måder at vælge den første film på, 4 måder at vælge den næste (da én film allerede er valgt) og 3 måder at vælge den sidste film på. Det giver i alt

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

forskellige måder at vælge de tre film på.

Udregningen i eksemplet kan omskrives på følgende måde:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!}.$$

Ud fra dette kan man argumentere for følgende generelle formel:

Sætning 1.8

Hvis man skal vælge r elementer ud af n , kan det gøres på $P(n, r)$ måder, hvis rækkefølgen har betydning. Tallet $P(n, r)$ kan udregnes vha. følgende formel:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

I de tilfælde, hvor $n = r$ (altså hvor man skal finde ud af, hvor mange måder man kan vælge alle elementerne på), taler man om *permutationer*. Antallet af permutationer af en mængde fortæller på hvor mange måder mængden kan sorteres.

Somme tider anvendes benævnelsen *permutationer* om tallet $P(n, r)$, selv om det mere korrekte her ville være at tale om » r -permutation af en n -mængde«.

1.3 Kombinationer

Hvis rækkefølgen ikke betyder noget, er der færre muligheder for at vælge et antal elementer ud af en større mængde. Hvis man skal vælge 3 ud af 5, er problemet ikke større, end at man kan tælle sig frem ved at gå systematisk til værks. Hvis man f.eks. skal vælge tre bogstaver ud af ABCDE kommer man frem til mulighederne i tabel 1.2. Der er altså 10 forskellige måder at vælge 3 ud af 5 på.

Grunden til, at der bliver færre muligheder, hvis rækkefølgen er ligegyldig, er, at i det tilfælde vil f.eks. ABC og CBA være det samme valg. Når rækkefølgen *har* betydning, kan man vælge 3 ud af 5 på

$$P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

forskellige måder. Disse 60 muligheder falder i grupper à 6, der indeholder de samme 3 elementer. 3 elementer kan nemlig *permuteres* på $P(3, 3) = 3!$ forskellige måder. Dvs. hvis rækkefølgen *ikke* har betydning, kan 3 ud af 5 kun vælges på

$$\frac{P(5, 3)}{P(3, 3)} = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = 10$$

forskellige måder. Denne udregning kan generaliseres til følgende sætning:

Sætning 1.9

Man kan vælge r elementer ud af n på $K(n, r)$ måder, hvis rækkefølgen er uden betydning. Tallet $K(n, r)$ kan beregnes som

$$K(n, r) = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}.$$

Tallet $K(n, r)$ kaldes *binomialkoefficienten*.

Der anvendes en del forskellig notation for antallet af kombinationer; foruden $K(n, r)$ ser man også tallet benævnt $K(n, r)$ eller $\binom{n}{r}$.

Eksempel 1.10 I et sæt spillekort er der 52 kort. Hvis man skal vælge 5 af disse kan det gøres på

$$K(52, 5) = \frac{52!}{5! \cdot (52-5)!} = \frac{52!}{5! \cdot 47!} = 2\,598\,960$$

forskellige måder.

Tabel 1.2: Mulighederne for at vælge tre bogstaver ud af ABCDE.

ABC	ACD	BCD	CDE
ABD	ACE	BCE	
ABE	ADE	BDE	

1.4 Øvelser

Øvelse 1.1

Et spørgeskema består af 5 spørgsmål med 4 svarmuligheder til hvert spørgsmål.

- a) På hvor mange måder kan dette spørgeskema udfyldes?

Øvelse 1.2

På en burgerrestaurant skal man selv sammensætte sin burger. Man kan vælge mellem 2 slags burgerboller, 3 slags bøffer og 5 slags salat.

- a) På hvor mange måder kan man sammensætte en burger?

Hvis man vil have en menu, skal man yderligere vælge mellem 6 slags drikkevarer og 3 slags tilbehør.

- b) Hvor mange forskellige burgermenuer kan man lave?

Øvelse 1.3

Erling går i kiosken for at købe snacks. Han kan vælge mellem 6 slags chips, 3 slags cookies og 4 slags saltede nødder.

- a) Hvor mange muligheder har Erling for at vælge hvis han kun har råd til at købe én ting?
b) Hvor mange muligheder har han hvis han har råd til at købe én af hver type snack?

Øvelse 1.4

Karl skal købe snacks eller slik til en filmaften. Han har besluttet sig for enten at købe chips med dip eller vingummier og lakridser. I kiosken har de 6 slags chips, 3 slags dip, 5 slags vingummier og 7 slags lakridser.

- a) På hvor mange måder kan Karl købe ind til filmaftenen?

Øvelse 1.5

I terningspillet yatzy kaster man med 5 terninger. Et slag kaldes »hus« hvis det består af 2 ens og 3 ens (og ikke alle 5 terninger er ens).

- a) På hvor mange måder kan man slå »hus«?

Øvelse 1.6

Et parti stiller 5 kandidater op til kommunalvalget. De 5 kandidater skal anbringes på en liste i prioriteret rækkefølge.

- a) På hvor mange måder kan listen laves?

Øvelse 1.7

I en petanque-klub med 15 medlemmer skal der vælges en formand, en næstformand og en kasserer.

- a) På hvor mange måder kan de tre personer vælges?

Øvelse 1.8

På hvor mange måder kan man vælge 5 spillekort ud af 52?

Øvelse 1.9

Vivi har 10 ulæste krimier stående på bogreolen. Hun vil have 3 af dem med på sin ferie.

- a) På hvor mange måder kan Vivi vælge de tre bøger?

Øvelse 1.10

På en ekskursion skal 18 elever (10 piger og 8 drenge) indkvarteres i to 4-sengs- og to 5-sengsværelser. Pigerne skal være i de to 5-sengsværelser.

- a) På hvor mange måder kan eleverne fordeles på værelserne?

Sandsynlighedsregning

2

Sandsynlighedsregning handler, som tidligere nævnt, om at kunne sætte tal på tilfældige fænomener. De første bøger om sandsynlighedsregning beskæftigede sig især med diverse spil,[7] og formålet var at finde frem til sandsynlighederne for de enkelte *udfald* af spil.

Et *udfald* kan mere generelt forstås som resultat af et »eksperiment«, dvs. en handling eller en hændelse der kan have flere forskellige resultater.

2.1 Hvad er sandsynlighed?

Kaster man en terning, vil sandsynligheden for at få en 5'er være $\frac{1}{6}$; men hvad betyder det egentligt? Når man kigger på en almindelig sekssidet terning, går man ud fra at der ikke er noget der gør det ene udfald mere sandsynligt end et andet, og man kan så finde sandsynligheden vha. denne formel:

$$\text{sandsynlighed} = \frac{\text{antal gunstige udfald}}{\text{antal mulige udfald}}. \quad (2.1)$$

I dette tilfælde er der tale om såkaldte *a priori* sandsynligheder, dvs. sandsynligheder der er givet på forhånd. Der er tale om en sandsynlighed man tænker sig til ved at analysere eksperimentet.

Man kan dog også bestemme sandsynligheden ved at man slår med terningen et meget stort antal gange og beregner i hvor mange procent af tilfældene man får 5'ere. En sådan sandsynlighed kaldes en *frekventiel* sandsynlighed.

Formlen ovenfor kan som sagt kun bruges når man analyserer en situation hvor alle udfaldene er lige sandsynlige. Det giver derfor god mening at forsøge at beskrive situationer man vil finde sandsynligheden af, på en sådan måde at de udfald man undersøger, er lige sandsynlige.

Tabel 2.1: Mulige udfald ved et kast med en terning.

<i>u</i>	<i>p</i>
	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{6}$

2.2 Sandsynlighedsfelter

Ser man på et kast med en terning, så er der 6 muligheder for hvad terningen kan vise. Disse muligheder er opsummeret i tabel 2.1. De 6 muligheder er lige sandsynlige, og disse udgør *udfaldsrummet* U , der er mængden af alle mulige udfald,

$$U = \{ \square, \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square & \square & \square \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square & \square & \square & \square \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square & \square & \square & \square & \square \end{smallmatrix} \}.$$

Summen af sandsynlighederne for alle udfald er 1. Udfaldsrummet U og de tilhørende sandsynligheder p kaldes tilsammen for et *sandsynlighedsfelt* (U, p) . Formelt har man følgende definition:

Definition 2.1

Hvis $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ er en mængde af udfald, og $p_1, \dots, p_n$ er de tilhørende sandsynligheder sådan at

1. tallene $p_1, \dots, p_n$ ligger mellem 0 og 1, og
2. $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$,

så kaldes (U, p) et endeligt¹ sandsynlighedsfelt.

¹Der findes også »uendelige« sandsynlighedsfelter hvor antallet af elementer er uendeligt (f.eks. »alle hele tal«), men de ligger uden for rammerne af denne fremstilling.

Hvis man skal beregne sandsynlighederne $p_1, \dots, p_n$, bliver det nemmere hvis udfaldsrummet er valgt sådan at alle udfald er lige sandsynlige; man taler i dette tilfælde om et *symmetrisk sandsynlighedsfelt*. Det gode ved et symmetrisk sandsynlighedsfelt er at her gælder formel (2.1). Dvs. et symmetrisk sandsynlighedsfelt er defineret på denne måde:

Definition 2.2

Hvis der for et sandsynlighedsfelt (U, p) med n elementer gælder at

$$P(u_1) = P(u_2) = \dots = P(u_n) = \frac{1}{n},$$

kaldes sandsynlighedsfeltet (U, p) et *symmetrisk sandsynlighedsfelt*.

Enhver delmængde af et udfaldsrum, dvs. en mængde af nogle af udfaldene fra udfaldsrummet, kaldes en *hændelse*. En hændelse er altså en betegnelse for nogle bestemte udfald, som man kigger på i en given situation (det svarer til de »gunstige udfald« i formlen 2.1).

Nogle mulige hændelser ved et kast med en terning kunne være:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\text{6}\} \\ H_2 &= \{\text{1}, \text{2}\} \\ H_3 &= \{\text{1}, \text{2}, \text{3}\} \end{aligned}$$

Hændelsen H_1 svarer til at få en 6'er, H_2 svarer til at få en 1'er eller en 2'er, mens H_3 svarer til at terningen viser et ulige antal øjne. Alle disse hændelser er altså noget der kan forekomme når man slår en enkelt gang med terningen.

²P'et kommer fra det engelske ord *probability*, der betyder »sandsynlighed«.

Til hver hændelse H hører der en sandsynlighed $P(H)$,² Man kan beskrive fordelingen af sandsynligheder ved at lave en tabel over sandsynlighederne for hvert enkelt udfald. Sandsynlighederne for et kast med en terning kan ses i tabel 2.1.

Man beregner sandsynligheden for en hændelse ved at lægge sandsynlighederne for alle de udfald der udgør hændelsen, sammen. For de tre hændelser beskrevet ovenfor får man:

$$P(H_1) = p_6 = \frac{1}{6}$$

$$P(H_2) = p_1 + p_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(H_3) = p_1 + p_3 + p_5 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Her er p_1 sandsynligheden for at få en 1'er, osv.

Når man regner på sandsynligheder, kan man nogle gange komme ud for at tage stilling til sandsynligheden for at to (eller flere) ting sker samtidig. Her er det vigtigt at vide om hændelserne er såkaldt *uafhængige* hændelser. Man har følgende:

Definition 2.3

Hvis der for to hændelser A og B i et sandsynlighedsfelt (U, p) gælder at

$$P(\text{både } A \text{ og } B) = P(A) \cdot P(B),$$

så kaldes de to hændelser *uafhængige*.

Her følger et eksempel på to hændelser der er uafhængige, og to der ikke er:

Eksempel 2.4 Hvis man kaster en terning to gange, så er de to hændelser

A : man får en 6'er i første kast

B : man får en 2'er i andet kast

uafhængige hændelser, fordi resultatet af det første kast ikke har nogen indflydelse af resultatet af det andet kast.

Et eksempel på to hændelser der *ikke* er uafhængige har man hvis man fylder 5 sorte og 5 røde bolde i en krukke og trækker to bolde op af krukken. Ser man på de to hændelser

C : man trækker en sort bold i første forsøg

D : man trækker en rød bold i andet forsøg ,

så er de ikke uafhængige fordi sandsynligheden af det andet udtræk afhænger af om man trak en sort eller en rød bold op første gang.

Det ovenstående bruges når man ser på sandsynligheden for at to hændelser begge indtræffer. Sandsynligheden for at *enten* en hændelse A *eller* en anden hændelse B indtræffer, kan man også beregne i de tilfælde hvor de to hændelser ikke har fælles udfald (dvs. ingen af udfaldene i A må være en del af B og omvendt). I de specielle tilfælde er

$$P(\text{enten } A \text{ eller } B) = P(A) + P(B).$$

2.3 Stokastiske variable

De tre hændelser H_1 , H_2 og H_3 ovenfor kan også beskrives ved såkaldte *stokastiske variable* som knytter et tal til de hændelser man ser på (dvs. hhv. »6'er«, »1'er eller 2'er«, »ulige tal«). Værdierne for to stokastiske variable X og Y kan ses i tabel 2.2.

Tabel 2.2: Udfald ved kast med en terning, samt de to stokastiske variable X og Y .

u	$P(u)$	X	Y
	$\frac{1}{6}$	1	0
	$\frac{1}{6}$	2	1
	$\frac{1}{6}$	3	0
	$\frac{1}{6}$	4	1
	$\frac{1}{6}$	5	0
	$\frac{1}{6}$	6	1

Værdierne af de stokastiske variable er valgt sådan at de beskriver hændelsen bedst muligt – i dette tilfælde ser man på tallene på terningen, eller om de er lige eller ulige. Tallene kan derudover være fuldstændigt tilfældige, men i praksis vil man ofte vælge dem så de beskriver hændelsen bedst muligt. Hændelserne H_1 , H_2 og H_3 kan i dette tilfælde skrives som

$$H_1 = \{X = 6\}, \quad H_2 = \{X \leq 2\}, \quad H_3 = \{Y = 0\}.$$

Dvs. sandsynlighederne for de tre hændelser kan skrives på denne måde:

$$P(H_1) = P(X = 6), \quad P(H_2) = P(X \leq 2) \quad \text{og} \quad P(H_3) = P(Y = 0).$$

Ud fra dette eksempel virker stokastiske variable måske som et unødvendigt ekstra lag, for man kan jo bare tælle sig frem. Men så snart situationen bliver bare en anelse mere kompliceret giver begrebet meget mere mening.

Eksempel 2.5 Hvis man kaster to terninger og er interesseret i øjensummen, så kan man skrive et udfaldsrum op bestående af tallene 2, 3, ... 12. Disse udfald er bare ikke alle lige sandsynlige idet man f.eks. kun kan få 12 ved at slå to 6'ere, mens man kan få 5 ved både at slå en 1'er og en 4'er eller en 2'er og en 3'er. Men fordi det er nemmere at regne på sandsynligheder hvis sandsynlighedsfeltet er symmetrisk, så analyserer man i stedet situationen på en anden måde:

Hvis man skelner mellem de to terninger ved at lade den ene være hvid og den anden sort, består udfaldsrummet U af par $(h; s)$, hvor h er øjnene på den hvide terning, og s øjnene på den sorte. Der er i alt 36 af sådanne par, udfaldsrummet har altså 36 elementer:

$$U = \{ (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), \\ (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), \\ (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), \\ (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), \\ (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), \\ (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare), (\square; \blacksquare) \}$$

Alle disse udfald er lige sandsynlige, dvs. sandsynligheden af ét af udfaldene er $\frac{1}{36}$. Sandsynligheden for parret $(\square; \blacksquare)$, svarende til at hvid er en 1'er og sort er en 6'er, er altså $\frac{1}{36}$.

Man kan nu definere den stokastiske variabel X hvis værdi er summen af øjnene på to terninger. De mulige værdier af X er så tallene fra 2 til 12, og vha. tabel 2.3, kan man skrive sandsynlighedsfordelingen for X op.

Hvis man f.eks. vil vide, hvor sandsynligt det er, at få øjensummen 9 ved et kast med to terninger, kan man tælle antallet af 9-taller i tabel 2.3 og gange med $\frac{1}{36}$, som er sandsynligheden for ét bestemt udfald. Der er fire 9-taller, så

$$P(X = 9) = 4 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{9}.$$

Den samlede sandsynlighedsfordeling for X kan ses i tabel 2.4.

Tabel 2.3: De mulige værdier for X : summen af øjnene ved et kast med to terninger.

	□	□	□	□	□	□
■	2	3	4	5	6	7
■	3	4	5	6	7	8
■	4	5	6	7	8	9
■	5	6	7	8	9	10
■	6	7	8	9	10	11
■	7	8	9	10	11	12

Tabel 2.4: Sandsynlighedsfordelingen for summen af øjnene ved et kast med to terninger.

t	$P(X = t)$
2	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{1}{18}$
4	$\frac{1}{12}$
5	$\frac{1}{9}$
6	$\frac{5}{36}$
7	$\frac{1}{6}$
8	$\frac{5}{36}$
9	$\frac{1}{9}$
10	$\frac{1}{12}$
11	$\frac{1}{18}$
12	$\frac{1}{36}$

Eksempel 2.6 Hvis man kaster en mønt 3 gange og tæller antallet af »krone«, så er der 4 forskellige muligheder for, hvor mange gange man kan få »krone«: 0, 1, 2 eller 3 gange. Men disse muligheder er ikke lige sandsynlige, og det er derfor ikke smart at betegne dem som udfald.

Man beskriver i stedet udfaldene som de kast, der rent faktisk kan forekomme, dvs. kombinationer af »plat« og »krone«:

ppp, ppk, pkk, osv.

Hvis man kigger på antallet af »krone« i 3 kast med en mønt, så er der tre mulige udfald der begge resulterer i 2 gange »krone«. Hændelsen, der udgør disse tre udfald, kan beskrives på denne måde

$$H = \{kpk, kp k, pkk\} .$$

Udfaldsrummet består af alle de mulige udfald, dvs.

$$U = \{kkk, kkp, kp k, pkk, kpp, pkp, ppk, ppp\} .$$

Her ser man at der i alt er 8 mulige udfald som er lige sandsynlige.

Man lader nu den stokastiske variabel X betegne antallet af »krone« i de tre kast, og man kan så lave en tabel over udfaldene og værdierne af den stokastiske variabel (se tabel 2.5). Hændelsen H som blev nævnt ovenfor, svarer så til $X = 2$.

Man kan se i tabellen, at $X = 2$ forekommer 3 steder, dvs.

$$P(X = 2) = 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8} .$$

Den samlede sandsynlighedsfordeling for antallet af »krone« i 3 kast med en mønt kan ses i tabel 2.6.

Man kan også præsentere sandsynlighedsfordelingen på en anden måde som søjlediagram. Et søjlediagram for sandsynlighedsfordelingen i tabel 2.6 kan ses på figur 2.7.

2.4 Middelværdi og spredning

Sandsynlighedsregning kan på mange måder sammenlignes med statistik hvor man i stedet for observationer og frekvenser taler om udfald og sandsynligheder, men metoderne er på mange måder de samme. F.eks. kan sandsynlighedsfordelinger også illustreres vha. søjlediagrammer som det blev gjort i eksemplet i sidste afsnit.

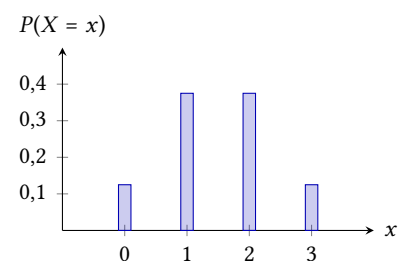
Hvis man har en stokastisk variabel med en tilhørende sandsynlighedsfordeling, kan man derfor også beregne dens middelværdi, varians og spredning.

Tabel 2.5: Værdierne af den stokastiske variabel X for alle mulige udfald af 3 kast med en mønt.

u	X
ppp	0
ppk	1
pkp	1
pkk	2
kpp	1
kpk	2
kkp	2
kkk	3

Tabel 2.6: X 's sandsynlighedsfordeling.

x	$P(X = x)$
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$



Figur 2.7: Sandsynlighedsfordelingen for X som søjlediagram.

Definition 2.7

For en stokastisk variabel X der kan antage værdierne $x_1, \dots, x_n$, er middelværdien μ , variansen σ^2 , og spredningen σ givet ved³

$$\begin{aligned}\mu &= E(X) = \sum_{i=0}^n x_i \cdot P(X = x_i) \\ \sigma^2 &= \text{Var}(X) = \sum_{i=0}^n (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) \\ \sigma &= \sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}.\end{aligned}$$

³ E 'et i betegnelsen $E(X)$ komme fra engelsk »expectation value«. Middelværdien kaldes også somme tider den *forventede værdi*.

Man ser her at formlerne er magen til dem der bruges i statistik, men hvor frekvensen f_i er erstattet af sandsynlighederne $P(X = x_i)$.

Eksempel 2.8 Hvis en stokastisk variabel X tæller antallet af »krone« i 3 kast med en mønt, så er dens sandsynlighedsfordeling givet ved tabel 2.6, så er middelværdien

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1,5,$$

variansen er

$$\sigma^2 = (0 - 1,5)^2 \cdot \frac{1}{8} + (1 - 1,5)^2 \cdot \frac{3}{8} + (2 - 1,5)^2 \cdot \frac{3}{8} + (3 - 1,5)^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4},$$

og spredningen er

$$\sigma = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0,866.$$

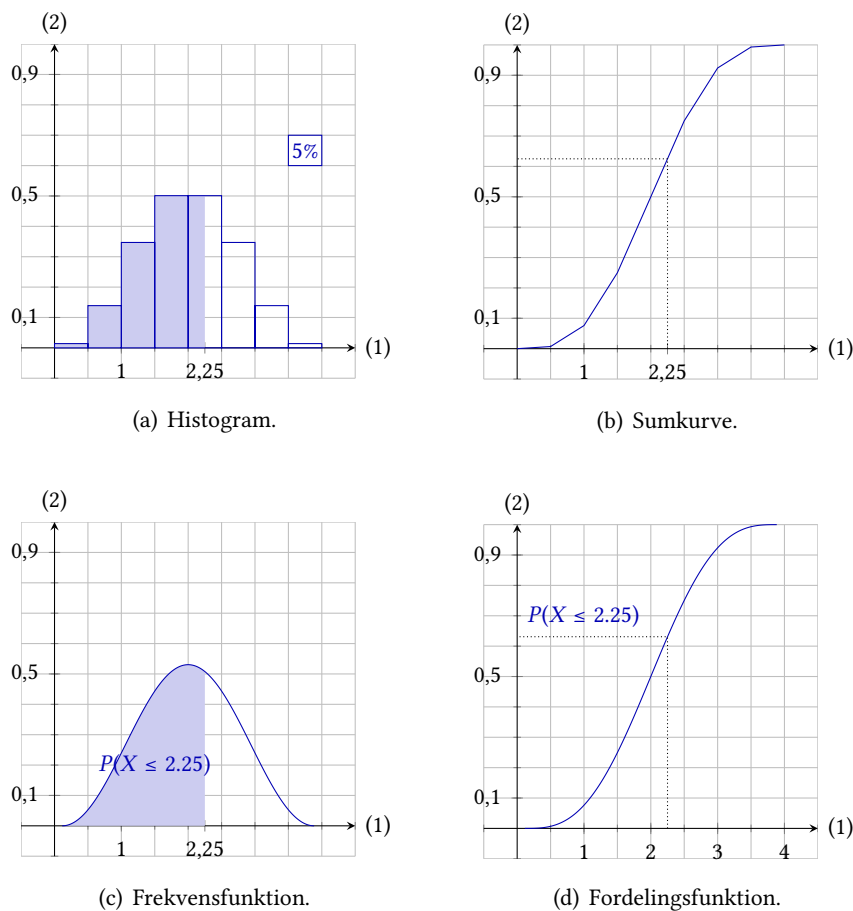
2.5 Diskrete og kontinuerte sandsynligheder

Hvis udfaldsrummet som ved et kast med en terning består af en række adskilte udfald, taler man om et *diskret* sandsynlighedsfelt. Kaster man med en terning, kan man ikke få alle tal mellem 1 og 6, f.eks. kan man ikke få 1,9 eller 2,7. Udfaldsrummet er derfor diskret. Et andet eksempel kunne være et kast med en mønt hvor man tæller antallet af »krone«. Her kan man få hele tal, 1, 2, 3, ... – men ikke f.eks. 2,5. De metoder man anvender når man ser på diskrete sandsynligheder, ligner dem man anvender inden for ugrupperet statistik.

Hvis udfaldet derimod kan ramme *alle tal* mellem en minimums- og en maksimumsværdi, så taler man om *kontinuerte* sandsynligheder. Her anvender man metoder der minder om dem der anvendes inden for grupperet statistik. Sandsynlighederne beregnes så i dette tilfælde på intervaller i stedet for på enkelte værdier.

Eksempel 2.9 Hvis der i løbet af et efterårsdøgn måles en minimumstemperatur på 0°C og en maksimumstemperatur på 4°C , så er temperaturen på et tilfældigt tidspunkt i løbet af dette døgn en kontinuert stokastisk variabel, idet temperaturen kan antage alle værdier i intervallet $[0; 4]$.

Hvis man antager, at man har målt temperaturen løbende i løbet af døgnet, kan man fremstille en histogram der viser fordelingen af temperaturer, og



Figur 2.8: Sammenhængen mellem histogram og sumkurve, og frekvens- og fordelingsfunktion.



en sumkurve der viser i hvor stor en del af døgnet, temperaturen lå under en given værdi. De to diagrammer kan f.eks. se ud som på figur 2.8(a) og 2.8(b).

Har man målt temperaturen løbende, kan man i princippet gøre intervallerne som histogrammet og sumkurven dækker, smallere og smallere. Dvs. hvis man forestiller sig at man gør søjlerne »uendeligt smalle«, vil man til sidst ende med graferne for to kontinuerte funktion, se figur 2.8(c) og 2.8(d).

Disse to funktioner kalder man *frekvensfunktionen* og *fordelingsfunktionen*. Lige som histogrammet arealet under histogrammet angiver frekvensen for en observation, angiver arealet under frekvensfunktionen sandsynligheden for en hændelse, og lige som sumkurven vokser fra 0 til 1, så er fordelingsfunktionen voksende fra 0 til 1.

Som det fremgår af eksemplet, kan kontinuerte stokastiske variable beskrives ved deres frekvensfunktion eller fordelingsfunktion. Sandsynligheden for at et udfald er mindre end en given værdi, kan så findes ved at bestemme arealet under grafen for frekvensfunktionen op til denne værdi. Men den kan også aflæses direkte på fordelingsfunktionen. Hvis fordelingsfunktionen for en kontinuert stokastisk variabel X kaldes F , gælder der

altså

$$P(X \leq a) = F(a) .$$

Skal man beregne sandsynligheden for at et udfald ligger i et interval $[a; b]$, får man

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a) .$$

Generelt gælder der følgende for kontinuerte sandsynlighedsfordelinger:

Sætning 2.10

Hvis X er en kontinuert stokastisk variabel med fordelingsfunktion F , så er

1. $P(X \leq a) = F(a)$
2. $P(X \geq a) = 1 - F(a)$
3. $P(a \leq X \leq B) = F(b) - F(a) .$

Specielt gælder der for kontinuerte stokastiske variable at sandsynligheden for at få et specifikt udfald er 0 fordi

$$P(X = a) = P(a \leq X \leq a) = F(a) - F(a) = 0 .$$

Dette (måske ikke specielt intuitive) resultat skyldes at når en stokastisk variabel er kontinuert, så findes der uendeligt mange tal i udfaldsrummet. Sandsynligheden for at få en specifik værdi bliver derfor uendeligt lille, dvs. 0.

Sammenhængen med integralregning

Idet man finder sandsynlighederne for en hændelse i et kontinuert sandsynlighedsfelt ved at bestemme arealet under en graf, kan denne sandsynlighed bestemmes vha. integration. Kender man til integralregning, kan frekvensfunktioner defineres på følgende måde:

Definition 2.11

En frekvensfunktion f er en kontinuert funktion, hvor $f(x) \geq 0$ for alle $x \in U$, og som opfylder at

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 .$$

Sandsynligheden for en hændelse kan så beregnes på denne måde:

Sætning 2.12

Lad X være en kontinuert stokastisk variabel med frekvensfunktion f . Lad intervallet $H = [h_1; h_2]$ være en hændelse. Da er sandsynligheden $P(H)$ af hændelsen H givet ved

$$P(H) = \int_{h_1}^{h_2} f(x) dx .$$

Idet værdien af fordelingsfunktionen er givet ud fra $F(a) = P(X \leq a)$, defineres fordelingsfunktioner på denne måde:

Definition 2.13

Lad X være en kontinuert stokastisk variabel med frekvensfunktion f . Da er fordelingsfunktionen F givet ved

$$F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx .$$

For kontinuerte stokastiske variable beregnes middelværdi og spredning også som integraler. Man har denne definition:

Definition 2.14

For en kontinuert stokastisk variabel X med frekvensfunktion f er middelværdien μ , variansen σ^2 , og spredningen σ givet ved

$$\begin{aligned}\mu &= E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \\ \sigma^2 &= \text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx \\ \sigma &= \sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} .\end{aligned}$$

2.6 Øvelser

Øvelse 2.1

Der er givet følgende tabel:

U :	0	1	2	3
A :	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
B :	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
C :	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$

- Hvilken af rækkerne A , B eller C repræsenterer mulige sandsynligheder til udfaldsrummet $U = \{0, 1, 2, 3\}$.
- Hvis (U, p) er et symmetrisk sandsynlighedsfelt, hvad er så sandsynligheden for udfaldet 3?

Øvelse 2.2

Claes kaster med en symmetrisk otte-sidet terning.

- Hvad er udfaldsrummet, og hvad er de tilhørende sandsynligheder?

Øvelse 2.3

Bestem sandsynlighederne for at man i ét kast med en symmetrisk otte-sidet terning får

- en 5'er
- en 8'er
- et ulige tal
- en værdi under 7

Øvelse 2.4

En terning og en mønt kastes samtidig.

- Beregn sandsynligheden for at terningen giver en 6'er og mønten viser »krone«.
- Beregn sandsynligheden for at terningen giver et ulige tal og mønten viser »plat«.

Øvelse 2.5

Hvis man kaster en terning tre gange, er de tre udfald uafhængige af hinanden.

- Bestem sandsynligheden for at få tre 6'ere i tre kast med en terning.

Øvelse 2.6

Tabellen nedenfor viser sandsynlighedsfordelingen for den stokastiske variabel X .

$x :$	-1	0	2	5
$P(X = x) :$	0,1	0,3	0,4	0,2

Bestem

- a) $P(X = 0)$ b) $P(X = 2)$ c) $P(X = 3)$
 d) $P(X > 0)$ e) $P(X < 5)$ f) $P(X \leq 5)$

Øvelse 2.7

Den stokastiske variabel X angiver antallet af øjne ved et kast med en terning.

- a) Bestem middelværdien $E(X)$.
 b) Bestem variansen $\text{Var}(X)$.
 c) Bestem spredningen $\sigma(X)$.

Øvelse 2.8

En stokastisk variabel X har den følgende sandsynlighedsfordeling:

$x :$	1	3	5
$P(X = x) :$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\square$

- a) Beregn den manglende værdi i tabellen ovenfor.
 b) Bestem $P(X > 1)$.
 c) Bestem $P(X \neq 3)$.
 d) Bestem middelværdien og spredningen for X .

Øvelse 2.9

Den stokastiske variabel X angiver den positive differens mellem øjentallene i et kast med to terninger.

- a) Bestem sandsynlighedsfordelingen for X .
 b) Bestem $P(X > 2)$.
 c) Bestem middelværdien for X , og bestem det mest sandsynlige udfald.

Øvelse 2.10

I et bestemt terningespil kaster man med to terninger. Hvis man får mindst én 1'er, får man en gevinst, ellers skal man betale. Gevinstfordelingen er givet ved denne tabel:

Antal 1'ere :	0	1	2
Gevinst (kr.) :	-2	3	10

- a) Bestem sandsynlighedsfordelingen for den stokastiske variabel X der angiver gevinsten i ét spil.
 b) Bestem middelværdien og spredningen for X .
 c) Hvad er den forventede gevinst hvis man spiller spillet 20 gange?

Øvelse 2.11

Den kontinuerte stokastiske variabel X har frekvensfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2 & \text{for } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

- a) Bestem $P(X \leq \frac{4}{5})$.
 b) Bestem middelværdien $E(X)$.

Øvelse 2.12

En stokastisk variabel har en frekvensfunktion givet ved

$$f(x) = k \cdot (4 - x^2), \quad -2 \leq x \leq 2.$$

- a) Bestem værdien af k , således at f er en gyldig frekvensfunktion.
 b) Beregn $P(X \geq 1)$.

Øvelse 2.13

Den kontinuerte stokastiske variabel X har frekvensfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

- a) Bestem $P(X \leq 1)$.
 b) Bestem middelværdien og spredningen for X .
 c) Bestem fordelingsfunktionen F , og tegn graferne for f og F i samme koordinatsystem.

Binomialfordelingen

3

Binomialfordelingen er en sandsynlighedsfordeling som bruges til at beregne hvor stor sandsynligheden er for at få et bestemt antal succeser i en række af eksperimenter. Det kunne f.eks. være hvor stor sandsynligheden er for at få tre 6'ere når man kaster en terning fem gange.

Når man regner på denne situation, tager man udgangspunkt i et eksperiment, man kalder *basiseksperimentet* som udføres et antal gange. Hver gang eksperimentet udføres, er der en sandsynlighed for succes (som man kalder *basissandsynligheden*, p) og en sandsynlighed for fiasko (som er $1 - p$).¹

Et eksempel på et basiseksperimentet er et kast med en terning. Det eksperiment udføres fem gange. Hvis succes er at få en 6'er, så er basissandsynligheden $\frac{1}{6}$ (da der er $\frac{1}{6}$ sandsynlighed for at få en 6'er i et kast med en terning). Sandsynligheden for fiasko er så $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, hvilket svarer til sandsynligheden for at få noget andet end en 6'er.

Hvis man så vil finde sandsynligheden for at få tre 6'ere i de fem kast, så skal man først overveje at de tre 6'ere kan fås på flere måder. Det kunne f.eks. være de første tre kast der gav 6'ere, eller det kunne være de sidste tre. De tre 6'ere kan altså falde på mange forskellige måder. For at man kan sige noget om sandsynligheden, er det derfor nødvendigt først at vide på hvor mange forskellige måder man kan få tre 6'ere i fem kast.

Dette kan beregnes vha. binomialkoefficienten (se sætning 1.9). Tre 6'ere i fem kast kan man få på $K(5,3) = 10$ forskellige måder.

Én af disse består i, at det er de første tre kast der giver 6'ere. Sandsynligheden for, at et kast giver en 6'er er $\frac{1}{6}$. Dette skal ske i de første tre kast. Fjerde og femte kast må ikke give 6'ere, sandsynligheden for dette er $\frac{5}{6}$. Den samlede sandsynlighed for at få først tre 6'ere og dernæst to kast, der giver noget andet, er derfor

$$\overbrace{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}}^{\text{De første tre}} \cdot \overbrace{\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}}^{\text{De sidste to}} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2.$$

Alle de måder, man kan få de tre 6'ere på, må være lige sandsynlige. Hvis man er interesseret i, hvor sandsynligt det er at få tre 6'ere i fem kast (og altså ikke kun at få tre 6'ere i de første tre kast), må denne sandsynlighed ganges med antallet af måder, man kan få de tre 6'ere på, dvs. sandsynligheden bliver

$$10 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{125}{3888} \approx 0,0322. \quad (3.1)$$

¹Hvis man ikke får succes, så får man fiasko, dvs. sandsynligheden for succes og sandsynligheden for fiasko må tilsammen give 1.

Hvis man samler alle deludregninger under ét kan udregningen (3.1) skrives således

$$K(5,3) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{5-3}. \quad (3.2)$$

Her anvender man kun de tal, der oprindeligt ses på, nemlig antallet af 6'ere (3), antallet af kast (5) og sandsynligheden for at få en 6'er i et enkelt kast ($\frac{1}{6}$).

3.1 Den generelle formel

Når man skal skrive en generel formel for binomialfordelingen op, indfører man en stokastisk variabel X der tæller antallet af succeser i n eksperimenter. I hver gentagelse af eksperimentet er der en sandsynlighed for succes, som er p .

Hvis en stokastisk variabel X opfylder at

- et *basiseksperiment* udføres n gange,
- resultatet af basiseksperimentet er succes eller fiasko,
- resultatet af basiseksperimenterne er uafhængige,
- sandsynligheden for succes i ét basiseksperiment er p , og
- X tæller antallet af succeser i de n basiseksperiment,

kaldes X binomialfordelt med *antalsparameter* n og *basissandsynlighed*, og man skriver $X \sim b(n, p)$. Sandsynligheden for r succeser, $P(X = r)$, kan beregnes ved følgende formel der er en generalisering af beregningen (3.2).

Sætning 3.1

Hvis den stokastiske variable X er binomialfordelt med antalsparameter n og basissandsynlighed p , $X \sim b(n, p)$, så er sandsynligheden for r succeser givet ved

$$P(X = r) = K(n, r) \cdot p^r \cdot (1 - p)^{n-r}.$$

Eksempel 3.2 Hvad er sandsynligheden for at få præcis fire 1'ere i 15 kast med en terning?

Den stokastiske variabel der tæller antallet af 1'ere i de 15 kast, er binomialfordelt med antalsparameter 15 og basissandsynlighed $\frac{1}{6}$, $X \sim b(15, \frac{1}{6})$. Sandsynligheden for at få de fire 1'ere er derfor

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= K(15, 4) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{15-4} \\ &= 1365 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11} = 0,1418. \end{aligned}$$

Der er altså 14,18% sandsynlighed for at få præcis fire 1'ere i 15 kast med en terning.

Eksempel 3.3 På en lille tropeø i stillehavet er der i gennemsnit oversvømmelse om sommeren hvert 4. år. Sandsynligheden for at der kommer en oversvømmelse i løbet af en enkelt sommer er altså $\frac{1}{4}$.

Den stokastiske variabel der tæller antallet af oversvømmelser i løbet af en 5-års periode må være binomialfordelt, $X \sim b(5, \frac{1}{4})$. I løbet af en periode på 5 år kan der forekomme alt mellem 0 og 5 oversvømmelser. Den samlede sandsynlighedsfordeling kan man derfor finde ved at beregne $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $\dots$, $P(X = 5)$.

Her er f.eks.

$$P(X = 3) = K(5,3) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0,0879.$$

Dette er altså sandsynligheden for, at der er oversvømmelser 3 gange i løbet af en 5-års periode. Den samlede fordeling kan ses i tabel 3.1. Et stolpediagram kan ses på figur 3.2.

Som man kan se både i tabellen og på figuren er, at det er mest sandsynligt, at der kommer oversvømmelse i et enkelt år; men man kan også se, at der er en forholdsvis stor sandsynlighed for, at der slet ikke kommer en oversvømmelse i løbet af de 5 år. Til gengæld er det meget lidt sandsynligt (0,0010) at der kommer oversvømmelse i alle 5 år i en 5-års periode.

Hvis man vil vide, hvor stor sandsynligheden er for, at der er højst én oversvømmelse i løbet af de 5 år, skal man udregne

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,2373 + 0,3955 = 0,6328.$$

Det er altså meget sandsynligt, at der er højst én oversvømmelse i løbet af de 5 år. Til gengæld er der dog også en sandsynlighed på

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0,6328 = 0,3672$$

for at der er mere end 1 oversvømmelse i løbet af 5 år.

3.2 Middelværdi og spredning

Middelværdien og spredningen for en binomialfordelt stokastisk variabel er givet ved følgende formler, som ikke bevises:[2]

Sætning 3.4

Hvis den stokastiske variabel X er binomialfordelt, $X \sim b(n, p)$, så er middelværdien μ og spredningen σ givet ved

$$\begin{aligned}\mu &= np \\ \sigma &= \sqrt{np(1-p)}.\end{aligned}$$

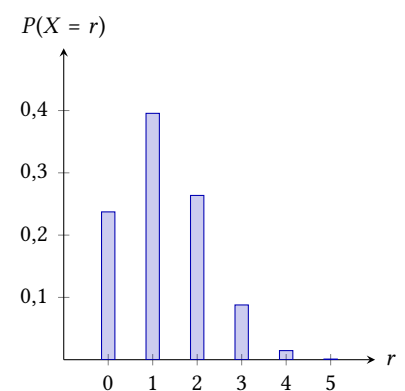
Eksempel 3.5 Hvis man kaster med en terning 10 gange og tæller antallet af 5'ere, så er den stokastiske variabel, der repræsenterer antallet af 5'ere binomialfordelt med antalsparameter $n = 10$ og basissandsynlighed $p = \frac{1}{6}$.

Middelværdien er så

$$\mu = n \cdot p = 10 \cdot \frac{1}{6} \approx 1,667.$$

Tabel 3.1: Sandsynligheden for, at der er r oversvømmelser i løbet af 5 år.

r	$P(X = r)$
0	0,2373
1	0,3955
2	0,2637
3	0,0879
4	0,0146
5	0,0010



Figur 3.2: Sandsynlighedsfordelingen for X : Antal oversvømmelser i løbet af en 5-års periode.

Hvis man kaster en terning 10 gange, vil man derfor gennemsnitligt få 1,667 5'ere.

Spredningen er

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)} = 1,179.$$

Eksempel 3.6 I eksempel 3.3 blev der set på en stokastisk variabel med antalsparameter 5 og basissandsynlighed $\frac{1}{4}$.

Her er middelværdien

$$\mu = n \cdot p = 5 \cdot \frac{1}{4} = 1,25,$$

og spredningen er

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)} = 0,9682.$$

3.3 Binomialtest

James Bond er kendt for at ville have sin martini »shaken and not stirred«. [5] Men kan han i virkeligheden smage forskel? Antag at han drikker 16 martinier og skal svare på, hvordan martinien er lavet. I 13 tilfælde svarer han rigtigt. Hvordan kan man afgøre, om det er tilstrækkeligt mange gange til at han ikke bare gætter?

Selve forsøget består 16 gentagelser af basiseksperimentet *bestem om martinien er »shaken« eller »stirred«*. Det er derfor binomialfordelingen der ligger til grund for vurderingen, og det test der skal udføres hedder derfor et *binomialtest*.²

²I statistik hedder det »et test«, se [4].

Før man udfører testet, skal man opstille en såkaldt *nulhypotese* der kan give en basissandsynlighed. Her vælger man nulhypotesen,

$$H_0: \text{James Bond rammer rigtigt i højst halvdelen af tilfældene.}$$

Dvs. nulhypotesen siger at James Bonds evne til at ramme rigtigt ikke er bedre end et rent gæt. Hypotesen bliver formuleret på denne måde fordi det er det man kan teste. Man ved nemlig hvad sandsynlighederne er hvis han bare gætter (så er sandsynligheden nemlig $\frac{1}{2}$) – derimod kan man ikke sige noget om sandsynlighederne hvis han rent faktisk kan kende forskel.

For en binomialfordeling $b(16, 0.5)$ er middelværdien $\mu = 16 \cdot 0.5 = 8$. Dvs. hvis han blot gætter, må man forvente at han rammer rigtigt i gennemsnit 8 gange ud af 16. Han har ramt rigtigt 13 gange. Dette tal der kaldes *teststørrelsen*, er selvfølgelig mere end 8, men spørgsmålet er om det er så meget mere at man kan udelukke et rent gæt. Det skal man have et kriterium for.

Man vælger derfor et såkaldt *signifikansniveau* der sætter grænsen for hvornår man vælger at forkaste nulhypotesen. Et typisk valg er 5%. Testet

går herefter ud på at undersøge hvor sandsynlig teststørrelsen er hvis nulhypotesen er sand.

Man beregner nu sandsynligheden

$$P(X \geq 13) = 0,0106 .$$

Denne sandsynlighed er den såkaldte p -værdi. Den viser at hvis nulhypotesen er sand (dvs. hvis James Bond gætter), så er der kun 1,06% sandsynlighed for at han rammer rigtigt 13 eller flere gange. Det tal er under det valgte signifikansniveau, og derfor *forkaster* man nulhypotesen. Når man forkaster nulhypotesen, accepterer man samtidig den *alternative hypotese*:

H_1 : James Bond rammer rigtigt mere end halvdelen af tilfældene.

Bemærk at denne hypotese siger det præcist modsatte af H_0 . Forkaster man H_0 , må man altså godtage H_1 (og omvendt). I dette tilfælde konkluderer man at James Bond er bedre end hvis han bare gætter – han *kan* altså smage forskel.

Kritisk område og acceptområde

Ovenfor testede man nulhypotesen ved at beregne p -værdien og sammenligne denne med signifikansniveauet. Man kan også teste nulhypotesen ved at beregne hvilken størrelse teststørrelsen skal have, for at man kan forkaste nulhypotesen.

I dette tilfælde undersøger man sandsynligheder af typen

$$P(X \geq k) ,$$

hvor k er et helt tal. Her har man f.eks.

$$P(X \geq 11) = 0,105 = 10,5\%$$

$$P(X \geq 12) = 0,038 = 3,8\% .$$

Det viser at der er mindre end 5% sandsynlighed for at få en værdi der er 12 eller mere. Det såkaldte *kritiske område* er derfor mængden

$$\{12, 13, 14, 15, 16\} .$$

Denne mængde beskriver de udfald som der tilsammen er mindre end 5% sandsynlighed for, dvs. mindre sandsynlighed end det valgte signifikansniveau.

Hvis den kritiske mængde er $\{12, 13, 14, 15, 15\}$, så er det såkaldte *acceptområde* mængden

$$\{0, 1, 2, \dots, 11\} .$$

Falder teststørrelsen i det kritiske område, forkaster man nulhypotesen. Omvendt accepterer man den hvis teststørrelsen falder i acceptområdet. Idet James Bonds resultat falder i det kritiske område, vælger man derfor at *forkaste* nulhypotesen. Han kan altså godt smage på hvilken måde martinien er lavet.

Testet der blev udført, er et såkaldt *højresidet* test idet man tester om værdien er for stor til at han bare gætter. I andre situationer kan man komme ud for at skulle teste om en given værdi er for lille, og her anvender man et *venstresidet* test:

Højresidet test I et højresidet binomialtest med signifikansniveau α er den kritiske mængde

$$K = \{k, k + 1, \dots, n\} ,$$

hvor k er det mindste tal, sådan at $P(X \leq k) \leq \alpha$.

Venstresidet test I et venstresidet binomialtest med signifikansniveau α er den kritiske mængde

$$K = \{0, 1, \dots, k\} ,$$

hvor k er det største tal, sådan at $P(X \leq k) \leq \alpha$.

Eksempel 3.7 Et firma der producerer dåsetomater, lover at 98% af dåserne kommer uskadte frem ved levering. Et supermarked modtager en palle tomater med 950 dåser. De 25 af dåserne har taget skade.

For at finde ud af om man kan stole på firmaets løfter, kan man lave et venstresidet binomialtest. Nulhypotesen er i dette tilfælde

$$H_0: \text{Mindst 98\% af dåserne er uskadte.}$$

Binomialfordelingen har så $n = 950$ og $p = 98\%$. Med et signifikansniveau på 5%, finder man

$$P(X \leq 923) = 0,0468 = 4,68\%$$

$$P(X \leq 924) = 0,0711 = 7,11\% .$$

Det kritiske område er altså

$$K = \{1, 2, 3, \dots, 921, 922, 923\} .$$

925 af dåserne er uskadte, og dette tal ligger uden for det kritiske område, så derfor accepteres nulhypotesen. På et 5% signifikansniveau kan man altså stole på firmaets løfter.

Man kunne også beregne p -værdien som i dette tilfælde er

$$p = P(X \leq 925) = 0,1045 = 10,45\% .$$

Dette tal er større end signifikansniveauet, så nulhypotesen er accepteret.

Tosidet test

I det test der blev udført ovenover, testede man om James Bond kunne kende forskel på to slags martinier ved at se på om antallet af rigtige svar var højt nok til at forkaste nulhypotesen.

Man kan også vælge at lave et *tosidet* test. Her tester man om tallet enten er for lille eller for stort. Nulhypotesen vil så være

H_0 : James Bond rammer rigtigt i præcist halvdelen af tilfældene.

Hvis man forkaster nulhypotesen her, vil konklusionen være at han kan smage forskel (men ikke at han kan fortælle hvilken drink der er hvad).

Da testet er tosidet, deler man signifikansniveauet med 2 (her bliver det 2,5%) og undersøger hvornår hhv. $P(X \leq k_1)$ og $P(X \geq k_2)$ bliver større end 2,5%. Her har man

$$P(X \leq 3) = 0,0106 = 1,06\%$$

$$P(X \leq 4) = 0,0384 = 3,84\%$$

og

$$P(X \geq 12) = 0,0384 = 3,84\%$$

$$P(X \geq 13) = 0,0106 = 1,06\% .$$

I dette tilfælde bliver det kritiske område

$$K = \{0, 1, 2, 3\} \cup \{13, 14, 15, 16\} .$$

Generelt finder man det kritiske område i et tosidet binomialtest på denne måde:

Tosidet test I et tosidet binomialtest med signifikansniveau α er det kritiske område

$$K = \{0, 1, \dots, k_1\} \cup \{k_2, \dots, n\} ,$$

hvor k_1 er det største tal, sådan at $P(X \leq k_1) \leq \frac{\alpha}{2}$, og k_2 er det mindste tal sådan at $P(X \geq k_2) \leq \frac{\alpha}{2}$.

Eksempel 3.8 I Vaffelbjerg Kommune fik Protestpartiet ved sidste kommunalvalg 17,2% af stemmerne. Ved en meningsmåling hvor man har spurgt 1000 repræsentativt udvalgte personer, siger 243 personer at de vil stemme på partiet ved næste kommunalvalg.

Hvis man vil vide om partiets stemmeandel har ændret sig, kan man udføre et tosidet binomialtest. Nulhypotesen bliver i dette tilfælde

$$H_0: \text{Partiets stemmeandel er } 17,2\%.$$

Binomialfordelingen har så $n = 1000$ og $p = 17,2\%$. Hvis signifikansniveauet er $\alpha = 5\%$, så er $\frac{\alpha}{2} = 2,5\%$. For den nedre grænse finder man

$$P(X \leq 148) = 0,0229 = 2,29\%$$

$$P(X \leq 149) = 0,028 = 2,8\%$$

og for den øvre grænse

$$P(X \geq 196) = 0,0259 = 2,59\%$$

$$P(X \geq 197) = 0,0214 = 2,14\% .$$

Ud fra disse beregninger kan man se at den kritiske mængde er

$$K = \{0, 1, \dots, 148\} \cup \{197, 198, \dots, 1000\}.$$

Idet tallet 243 ligger i det kritiske område, forkaster man nulhypotesen. Partiets vælgertilslutning *har* altså ændret sig siden valget.

Man kan også teste tosidet ved at beregne p -værdien.

Eksempel 3.9 Her regnes på den samme situation som i eksempel 3.8. Hvis nulhypotesen er

$$H_0: \text{Partiets stemmeandel er } 17,2\%,$$

forventer man at 172 ud af 1000 mennesker stemmer på partiet. Idet 243 personer siger at de vil stemme på partiet, skal man finde ud af om dette tal er for højt. Man beregner derfor

$$p = P(X \geq 243) = 8,2 \cdot 10^{-9}.$$

Dette tal er utroligt lille, og bestem mindre end 2,5%. Derfor forkastes nulhypotesen, og man accepterer den alternative hypotese:

$$H_1: \text{Partiets stemmeandel er ikke } 17,2\%.$$

Altså har partiets vælgertilslutning ændret sig siden valget.

3.4 Øvelser

Øvelse 3.1

Afgør for hver af de følgende situationer om de svarer til en binomialfordelt stokastisk variabel.

- Antallet af rigtigt besvarede spørgsmål i en multiple choice-test med 20 spørgsmål der hver har 4 svarmuligheder, hvis man gætter tilfældigt på svarene.
- Antallet af højrehådede blandt 10 tilfældigt valgte elever fra en klasse på 28, hvoraf 22 er højrehådede og 6 er venstrehådede.

Øvelse 3.2

En terning kastes 7 gange.

- Hvad er sandsynligheden for at få tre 5'ere?
- Hvad er sandsynligheden for at tre af terningerne har en ulige værdi?

Øvelse 3.3

Leopold kommer i gennemsnit for sent til første time på gymnasiet én dag om ugen.

- Hvad er sandsynligheden for at han i en bestemt uge kommer for sent 4 gange?

Øvelse 3.4

En mønt kastes 5 gange.

- Bestem sandsynligheden for at mønten ikke viser »krone« en eneste gang.
- Bestem sandsynligheden for at mønten viser »krone« mindst én gang.
- Hvor mange gange skal man mindst kaste med mønten hvis sandsynligheden for at få »krone« mindst én gang skal være mere end 99%?

Øvelse 3.5

På en fabrik produceres elektriske løbehjul. Erfaringsmæssigt ved man at 2% af de producerede løbehjul er defekte.

Bestem sandsynligheden for at der blandt 100 tilfældigt udvalgte løbehjul er

- a) ingen defekte b) 3 defekte
- c) højst 5 defekte d) mellem 3 og 8 defekte

Hvad er det mest sandsynlige antal defekte blandt de 100 løbehjul?

Øvelse 3.6

I Vaffelkøbing Kommune stemmer 23% af de stemmeberettigede på Lokalpartiet. Der udtages på tilfældig vis en stikprøve på 117 mennesker.

Den stokastiske variabel X betegner antallet af mennesker i stikprøven der stemmer på Lokalpartiet.

- a) Bestem middelværdien og spredningen for X .
- b) Hvad er sandsynligheden for at ingen blandt de 117 i stikprøven stemmer på Lokalpartiet?
- c) Hvad er sandsynligheden for at højst 12 blandt de 117 i stikprøven stemmer på Lokalpartiet?

Øvelse 3.7

Ole har en terning som han mistænker for at slå 6'ere for tit. Han opstiller nu nulhypotesen

$$H_0: \text{Terningen giver 6'ere højst } \frac{1}{6} \text{ af gangene.}$$

For at teste hypotesen kaster han terningen 50 gange. Terningen giver en 6'er 14 gange. Han vælger et signifikansniveau på 5%.

- a) Bestem det kritiske område og acceptområdet.
- b) Kan han forkaste nulhypotesen?
- c) Kan nulhypotesen forkastes på signifikansniveau 1%?

Ole opstiller nu en ny nulhypotese:

$$H_0: \text{Terningen giver 6'ere præcis } \frac{1}{6} \text{ af gangene.}$$

Han tester denne nulhypotese på signifikansniveau 5%.

- d) Bestem det kritiske område og acceptområdet for den nye hypotese.
- e) Kan denne hypotese forkastes?

Øvelse 3.8

I et lotteri lover arrangøren at der er gevinst på hvert 3. lod. Ursula vil teste denne påstand, så hun opstiller nulhypotesen

$$H_0: \text{Der er gevinst på mindst } \frac{1}{3} \text{ af lodderne.}$$

Hun køber nu 10 lodder, og det viser sig at der kun er gevinst på ét af dem.

- a) Bestem p -værdien hvis signifikansniveauet er 5%.
- b) Kan Ursula forkaste hypotesen?

Øvelse 3.9

Et firma sælger elcykler. De lover at højst 2% af de producerede elcykler har problemer med batteriet.

En cykelhandler køber 25 cykler af firmaet. Det viser sig at 3 af cyklerne har problemer med batteriet.

- a) Opstil en nulhypotese der kan anvendes til at teste firmaets påstand.
- b) Bestem det kritiske område og acceptområdet.
- c) Kan cykelhandleren forkaste nulhypotesen på signifikansniveau 5%?

Øvelse 3.10

Et firma der arbejder med avanceret nanoteknologi fremstiller en bestemt komponent som tidligere har levet op til kvalitetskravene i 35% af tilfældene. Firmaet har nu ændret deres produktionsmetode og vil undersøge om det har ført til en signifikant forbedring af kvaliteten.

De tager derfor en stikprøve på 24 komponenter hvoraf de 13 lever op til kvalitetskravene.

- a) Opstil en nulhypotese der kan bruges til at afgøre om den nye metode er en forbedring i forhold til den gamle.
- b) Kan nulhypotesen forkastes på signifikansniveau 5%?

Øvelse 3.11

På Vaffelbjerg Gymnasium vælger 14% af eleverne normalt fransk som andet fremmedsprog. Et enkelt år optager gymnasiet 73 elever hvoraf 18 vælger fransk som andet fremmedsprog.

- a) Afgør på 5% signifikansniveau om andelen af elever der vælger fransk som andet fremmedsprog har ændret sig.

Normalfordelingen

4

Mange statistiske målinger resulterer i frekvensfordelinger, der med god tilnærmelse følger den sandsynlighedsfordeling der kaldes normalfordelingen. Et eksempel på dette kunne være tykkelsen af brød skåret på en maskine.

Ingen maskine skærer helt perfekt. I tabel 4.1 ses målinger foretaget på en maskine der skal skære brød i 1 cm tykke skiver. Nogle af skiverne bliver for tykke og nogle for tynde; men det ser dog ud til at de fleste har en tykkelse på omkring 1 cm.

Ud fra tallene i tabellen kan man også finde middelværdien μ og stikprøve-spredningen s for tykkelsen af brødsiverne. Det viser sig, at

$$\bar{x} = 1,151 \quad \text{og} \quad s = 0,249.$$

På figur 4.2 er der tegnet et histogram over fordelingen fra tabel 4.1. På figuren er også indtegnet grafen for frekvenssfunktionen for *normalfordelingen med middelværdi 1,151 og spredning 0,249*. frekvensfunktionens graf er en klokkeformet kurve, der ser ud til at passe ganske godt med de målte værdier af brødsivernes tykkelse.

Hvis en kontinuert stokastisk variabel X er normalfordelt med middelværdi μ og spredning σ , skriver man $X \sim N(\mu, \sigma)$. Er X normalfordelt, har den følgende frekvensfunktion:

Definition 4.1

En stokastisk variabel X kaldes normalfordelt med middelværdi μ og spredning σ , $X \sim N(\mu, \sigma)$ hvis den har frekvensfunktionen

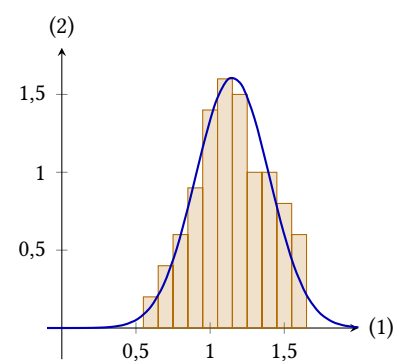
$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Der er mange fænomener, der resulterer i normalfordelte data. Nogle af dem kunne være

- Målefejl i eksperimenter.
- Størrelsen af ting, der er maskinelt fremstillet (som f.eks. tykkelsen af brødsiverne ovenfor).
- Biologiske variable som f.eks. højde og vægt.¹

Tabel 4.1: Målinger på 100 skiver brød skåret på en maskine.

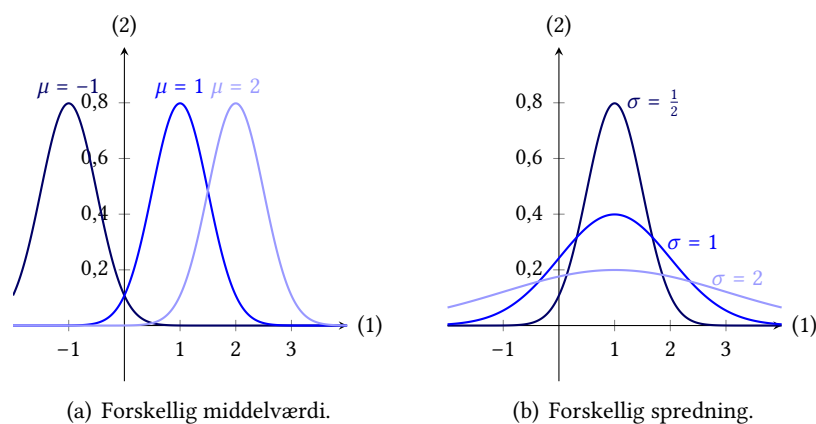
Tykkelse (cm)	Antal
0,55–0,65	2
0,65–0,75	4
0,75–0,85	6
0,85–0,95	9
0,95–1,05	14
1,05–1,15	16
1,15–1,25	15
1,25–1,35	10
1,35–1,45	10
1,45–1,55	8
1,55–1,65	6



Figur 4.2: Histogram over tykkelsen af brødsiver.

¹Mange biologiske variable er dog kun tilnærmelsesvis normalfordelte og er i virkeligheden log-normalfordelte.[8].

Figur 4.3: Hvis frekvensfunktionerne har den samme spredning, men forskellig middelværdi, er graferne forskudt vandret. Har de den samme middelværdi, men forskellig spredning, ændres bredden af kurven.



Middelværdien og spredningen påvirker udseendet af kurven. Hvis man ændrer middelværdien flytter kurven sig i vandret retning. Hvis spredningen bliver mindre, bliver kurven smallere; bliver spredningen større, bliver kurven bredere (se figur 4.3).

Som for alle andre kontinuerte sandsynlighedsfordelinger finder man sandsynligheden for at få en måling i et bestemt interval ved at bestemme arealet under grafen for frekvensfunktionen i det pågældende interval.

Eksempel 4.2 En maskine på en fabrik fylder 1 kg poser med sukker. Vægten af poserne er normalfordelt med middelværdien $\mu = 1000$ g og spredning $\sigma = 25$ g. Frekvensfunktionen er så

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 25} \cdot e^{-\frac{(x-1000)^2}{2 \cdot 25^2}}.$$

²Det er ikke muligt at skrive et algebraisk udtryk op for fordelingsfunktionen, men den er heldigvis programmeret ind i de fleste CAS-værktøjer

Sandsynligheder beregnes dog nemmest ud fra fordelingsfunktionen, F .² Sandsynligheden for i en stikprøve at få en pose, der vejer mellem 950 og 975 g bliver

$$\begin{aligned} P(950 \leq X \leq 975) &= F(975) - F(950) \\ &= 0,1359 = 13,59\%. \end{aligned}$$

Der er altså en ikke ubetydelig sandsynlighed for at få fat i en pose der vejer et lille stykke under 1 kg.

Eksempel 4.3 Her ses igen på eksemplet med brødkiverne fra starten af kapitlet. Det viste sig, at den stokastiske variabel der angiver tykkelsen af brødkiverne med god tilnærmelse er normalfordelt med middelværdi $\mu = 1,151$ og spredning $\sigma = 0,249$.

Ud fra dette kan man få svar på spørgsmål som

1. Hvad er sandsynligheden for at få en skive brød, hvis tykkelse er mellem 0,9 cm og 1 cm?
2. Hvad er sandsynligheden for at få en skive brød, hvis tykkelse er over 1,3 cm?

Begge svar findes nemmest ved at bruge fordelingsfunktionen til at udregne arealet under grafen for frekvensfunktionen. Sandsynligheden for at få en skive brød med en tykkelse mellem 0,9 cm og 1 cm er så

$$P(0,9 \leq X \leq 1) = F(1) - F(0,9) = 0,1154.$$

Sandsynligheden for at få en skive brød, der er tykkere end 1,3 cm er

$$P(X \geq 1,3) = 1 - P(X \leq 1,3) = 1 - F(1,3) = 0,2748.$$

De arealer, der repræsenterer sandsynlighederne kan ses på figur 4.4.

Grafen for normalfordelingens frekvensfunktion er symmetrisk omkring middelværdien. Faktisk opfører frekvensfunktionen sig så pænt, at man har følgende sætning som ikke bevises her.[6]

Sætning 4.4

Hvis X er en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi μ og spredning σ er

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0,9545$$

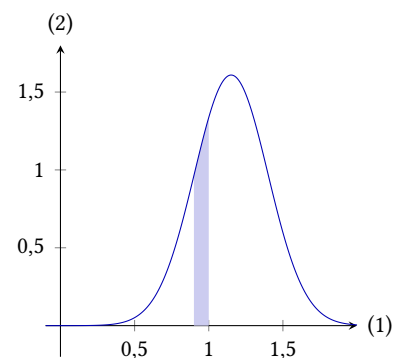
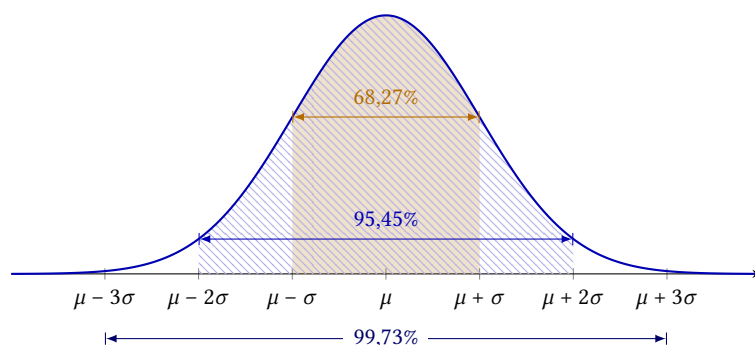
$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0,9973.$$

Ud fra denne sætning kan man se, at 68,27% af alle målinger vil ligge i et interval der dækker 1 spredning til hver side af middelværdien. 95,45% vil ligge i et interval på 2 spredninger til hver side af middelværdien, osv. Dette kan ses illustreret på figur 4.5.

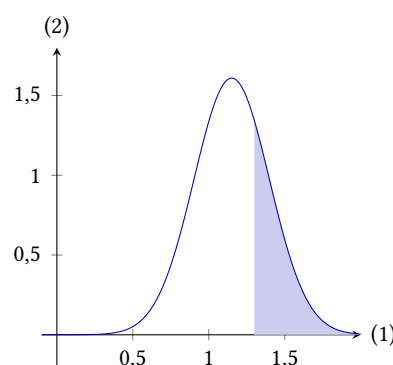
Idet langt de fleste udfald (95,45%) ligger inden for intervallet $\mu \pm 2\sigma$, kalder man udfald der ligger i dette interval for *normale* udfald. Udfald der ligger mere end 3σ fra middelværdien, kaldes *eksceptionelle* udfald. Disse udfald udgør nemlig kun $1 - 0,9973 = 0,0027 = 0,27\%$ af den samlede fordeling.

4.1 Approksimation til binomialfordelingen

Hvis man har en stokastisk variabel som er binomialfordelt $X \sim b(n, p)$, viser det sig at man kan approksimere fordelingen af X med en normalfordeling der har samme middelværdi og spredning som binomialfordelingen. Approksimationen er god når $n \cdot p \geq 5$ og $n \cdot (1 - p) \geq 5$. [1]



(a) $P(0,9 \leq X \leq 1) = 0,1154$.



(b) $P(X \geq 1,3) = 0,2748$.

Figur 4.4: Sandsynlighederne for at brødsnivernes tykkelser falder i bestemte intervaller kan aflæses som arealet under grafen for tæthedsfunktionen.

Figur 4.5: For en normalfordelt stokastisk variabel gælder, at sandsynligheden for at X ligger i et symmetrisk interval på 1 spredning til hver side af middelværdien er et fast tal. Det samme gælder for et interval på 2 spredninger til hver side af middelværdien, osv.

Eksempel 4.5 Hvis en stokastisk variabel X er binomialfordelt med antalsparameter $n = 10$ og sandsynlighedsparameter $p = 0,4$, er

$$n \cdot p = 10 \cdot 0,4 = 4 \quad \text{og} \quad n \cdot (1 - p) = 10 \cdot 0,6 = 6.$$

$n \cdot p$ giver her 4 som er en mindre end 5, dvs. man forventer ikke at normalfordelingen er en specielt god approksimation til denne binomialfordeling.

Middelværdien og spredningen for denne binomialfordeling er

$$\begin{aligned}\mu &= n \cdot p = 4 \\ \sigma &= \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = \sqrt{2,4} = 1,55.\end{aligned}$$

På figur 4.5 ses et søjlediagram over sandsynlighedsfordelingen for X sammen med grafen for frekvensfunktionen for normalfordelingen med middelværdi 4 og spredning 1,55, og som man kan se, er approksimationen nogenlunde, men ikke specielt god.

Ser man derimod på en stokastisk variabel Y der er binomialfordelt $Y \sim b(50, 0,4)$, bliver billedet et andet. Her er

$$n \cdot p = 50 \cdot 0,4 = 20 \quad \text{og} \quad n \cdot (1 - p) = 50 \cdot 0,6 = 30.$$

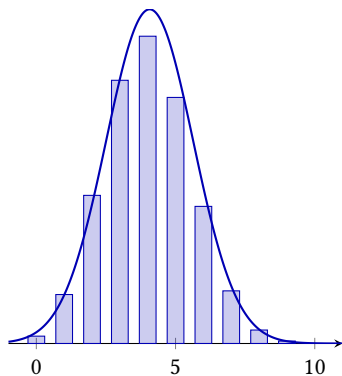
Begge disse værdier er helt klart større end 5, så man forventer at approksimationen med normalfordelingen er god.

Middelværdien og spredningen er

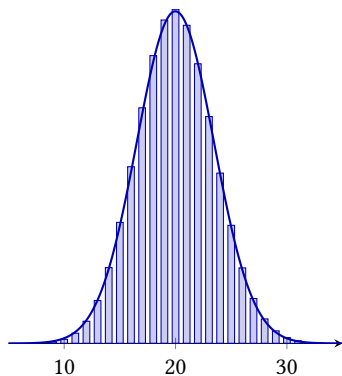
$$\begin{aligned}\mu &= 50 \cdot 0,4 = 20 \\ \sigma &= \sqrt{50 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = \sqrt{12} = 3,46.\end{aligned}$$

Tegner man nu et søjlediagram over sandsynlighedsfordelingen for Y og grafen for frekvensfunktionen for normalfordelingen med middelværdi 20 og spredning 3,46, får man billedet på figur 4.5.

Her ses en tydelig overensstemmelse mellem grafen og søjlediagrammet, dvs. her er normalfordelingen en god tilnærmelse til binomialfordelingen.



Figur 4.6: Fordelingen $b(10, 0,4)$ approksimeret med en normalfordeling.



Figur 4.7: Fordelingen $b(50, 0,4)$ approksimeret med en normalfordeling.

4.2 Stikprøver

Idet normalfordelingen anvendes som approksimation til binomialfordelingen, kan den også bruges til at bestemme et *konfidensinterval* for sandsynlighedsparameteren i en binomialfordeling. For at kunne bestemme konfidensintervallet, skal man dog først have et estimat for sandsynlighedsparameteren.

Eksempel 4.6 Et firma vil undersøge hvor mange procent af befolkningen der kender til et nyt produkt de har sendt på markedet. Et analysefirma spørger en stikprøve på 1142 repræsentativt udvalgte mennesker om de kender til det nye produkt. Det viser sig at 715 har hørt om det nye produkt.

Ud fra disse tal, kan man estimere at

$$\hat{p} = \frac{715}{1142} = 0,626 = 62,6\%$$

af befolkningen har hørt om det nye produkt.

Spørgsmålet er nu hvor sikker man kan være på dette tal? Hvis man antager at $\hat{p}$ er et godt estimat for den sande sandsynlighedsparameter p , så er antallet af mennesker der har hørt om produktet, binomialfordelt med antalsparameter $n = 1142$ og sandsynlighedsparameter $\hat{p} = 0,626$. Middelværdien for denne binomialfordeling er

$$\mu = n\hat{p},$$

og spredningen er

$$\sigma = \sqrt{n\hat{p}(1 - \hat{p})}.$$

Hvis man så approksimerer denne binomialfordeling med en normalfordeling, finder man at 95,45% af fordelingen vil ligge i intervallet

$$\mu \pm 2\sigma = n\hat{p} \pm 2 \cdot \sqrt{n\hat{p}(1 - \hat{p})}.$$

Idet man er mere interesseret i den procentvise andel end af antallet, kan man dividere dette tal med n , hvorved man får intervallet

$$\hat{p} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}.$$

Man kan nu sige at med 95,45% sandsynlighed vil den rigtige værdi for sandsynlighedsparameteren p ligge i dette interval.

Argumentet ovenfor er kun gyldigt hvis man rent faktisk kan approksimere binomialfordelingen med en normalfordeling. Dvs. kriteriet

$$n \cdot \hat{p} \geq 5 \quad \text{og} \quad n \cdot (1 - \hat{p}) \geq 5$$

skal være opfyldt. Hvis det er tilfældet kan man bruge følgende sætning til at beregne 95%-konfidensintervallet.

Sætning 4.7

Ved en stikprøve med n elementer og n_s succeser, er 95%-konfidensintervallet givet ved

$$\left[\hat{p} - 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}; \hat{p} + 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \right],$$

hvor $\hat{p} = \frac{n_s}{n}$.

I virkeligheden finder man 95,45%-konfidensintervallet for p , når man bruger denne formel. Hvis man er interesseret i præcis 95%, skal 2-tallet i formlen erstattes med 1,96.[6]

Eksempel 4.8 I eksemplet fra før, blev sandsynlighedsparameteren estimeret til $\hat{p} = 0,626$, dvs.

$$2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{0,626 \cdot (1 - 0,626)}{1142}} = 0,029.$$

Sandsynlighedsparameteren ligger derfor med 95% sandsynlighed i intervallet

$$0,629 \pm 0,029$$

hvilket vil sige at med 95% sandsynlighed har mellem 59,7% og 65,5% af befolkningen hørt om det nye produkt.

4.3 Standardnormalfordelingen

Hvis man skal regne på normalfordelingen vil man normalt anvende et CAS-værktøj. Før dette var muligt var man nødt til at anvende tabelopslag.

Da man ikke kan lave en tabel for hver mulig middelværdi og spredning, lavede man i stedet tabeller over den såkaldte *standardnormalfordeling* og udnyttede, at enhver normalfordelings frekvens- og fordelingsfunktion kan udtrykkes vha. standardnormalfordelingen.

Standardnormalfordelingen er defineret på følgende måde.

Definition 4.9

Normalfordelingen med middelværdi $\mu = 0$ og spredning $\sigma = 1$ kaldes *standardnormalfordelingen*. Dens frekvensfunktion er

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Fordelingsfunktionen for standardnormalfordelingen er

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt.$$

I de næste par sætninger vises sammenhængen mellem frekvens- og fordelingsfunktionen for en vilkårlig normalfordeling og de tilsvarende funktioner for standardnormalfordelingen.

Sætning 4.10

Der er følgende sammenhæng mellem frekvensfunktionen $f(x)$ for normalfordelingen med middelværdi μ og spredning σ og frekvensfunktionen for standardnormalfordelingen:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Bevis

Sætningen bevises ved at regne på $\frac{1}{\sigma} \cdot \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \cdot \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) &= \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = f(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Den funktion man fandt i tabeller var dog ikke frekvensfunktionen, men fordelingsfunktionen, idet denne kan bruges direkte til at beregne sandsynligheder. Her gælder følgende sammenhæng:

Sætning 4.11

Sammenhængen mellem fordelingsfunktionen $F(x)$ og standardnormalfordelingens fordelingsfunktion $\Phi(x)$ er

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

Bevis

Fordelingsfunktionen for normalfordelingen med middelværdien μ og spredningen σ er ifølge sætning 4.10

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma} \cdot \phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right) dt. \quad (4.1)$$

Man laver nu substitutionen $u = \frac{t - \mu}{\sigma}$. Herved bliver $du = \frac{1}{\sigma} \cdot dx$, og udtrykket i (4.1) bliver til

$$\int_{-\infty}^{\frac{x - \mu}{\sigma}} \phi(u) du = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

Altså er

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right). \quad \blacksquare$$

Det er ikke nødvendigt at vide dette, hvis man blot skal regne direkte på en given normalfordeling. Men det viser sig, at standardnormalfordelingen kan være nyttig, hvis man vil undersøge, om et givent datasæt er normalfordelt.

4.4 Normalfordelte data

I dette afsnit vises hvordan man kan konstruere et såkaldt *fraktilplot* eller *QQ-plot* som er en graf der kan bruges til at afgøre om et datasæt er normalfordelt.

Eksempel 4.12 Det skal undersøges om følgende talsæt er normalfordelt (tallene viser kontrolvejninger af 30 sække gulerødder der hver skal veje 25 kg):

24,8	25,4	25,0	25,4	24,0	24,4
24,5	24,5	24,8	24,9	24,9	25,0
24,7	24,3	24,7	24,8	25,0	25,1
25,1	24,5	24,3	25,0	25,3	25,1
24,5	24,7	25,3	24,6	24,5	24,8

Hvis man beregner middelværdien og stikprøvespredningen af dette datasæt, får man

$$\bar{x} = 24,8 \quad \text{og} \quad s = 0,35.$$

Det man nu gerne vil vide, er om datasættet svarer til en normalfordeling med denne middelværdi og spredning. Først sorterer man de 30 tal og nummererer dem (se tabel 4.8).

Ideen i et fraktilplot er at sammenligne de kumulerede frekvenser med de kumulerede frekvenser for standardnormalfordelingen. Hvis dataene er

Tabel 4.8: Vægten af sække med gulerødder, sorteret og nummereret.

Vægt, x	i	$z = \Phi^{-1}\left(\frac{i-0,5}{n}\right)$
24,0	1	-2,13
24,3	2	-1,64
24,3	3	-1,38
24,4	4	-1,19
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
25,3	28	1,38
25,4	29	1,64
25,4	30	2,13

normalfordelte så vil de kumulerede være givet ved en fordelingsfunktion $F(x)$ for en normalfordeling med middelværdi $\bar{x}$ og spredning s hvor

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \bar{x}}{s}\right),$$

³Her er Φ^{-1} den inverse funktion til fordelingsfunktionen for standardnormalfordelingen. Denne funktion findes i de fleste CAS-værktøjer.

hvilket kan omskrives til³

$$\Phi^{-1}(F) = \frac{x - \bar{x}}{s}.$$

Det vil sige, at $\Phi^{-1}(F)$ er en lineær funktion af x .

Her er F de kumulerede frekvenser. I dette eksempel er de kumulerede frekvenser $F = \frac{i}{30}$ hvor i er målingens nummer. Den første måling har så den kumulerede frekvens $\frac{1}{30}$, mens den sidste har den kumulerede frekvens $\frac{30}{30} = 1$. Dette giver et problem, idet funktionen $\Phi^{-1}(F)$ ikke er defineret for $F = 1$.⁴ For at få det sidste punkt med anvender man derfor tallet $\frac{i-0,5}{n}$ (hvor n er antallet af målinger, dvs. her er $n = 30$) stedet for de kumulerede frekvenser[3] og beregner z som

$$z = \Phi^{-1}\left(\frac{i - 0,5}{n}\right).$$

Herefter afbilder man z som funktion af x , se figur 4.9.

Hvis datasættet med god tilnærmelse er normalfordelt, så skal punkterne ligge tilnærmelsesvis på den rette linje $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ som i dette tilfælde er

$$z = \frac{x - 24,8}{0,35}.$$

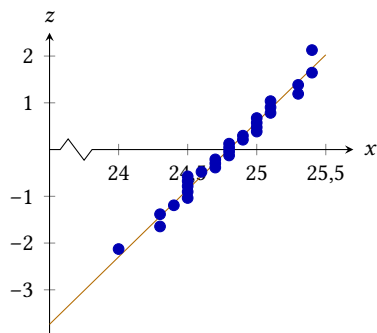
På figuren kan man se at punkterne med god tilnærmelse ligger på denne rette linje, så man kan konkludere at datasættet er normalfordelt.

En sammenfatning af metoden ser således ud:

1. Beregn middelværdien $\bar{x}$ og stikprøvespredningen s .
2. Lav en tabel over datasættet hvori tallene er sorteret og nummereret.
3. Tilføj en kolonne hvori $z = \Phi^{-1}\left(\frac{i-0,5}{n}\right)$.
4. Afsæt punkterne (x, z) i et koordinatsystem. x er målingen.
5. Tegn også linjen $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$.
6. Hvis datasættet er normalfordelt, så skal punkterne med god tilnærmelse ligge på denne linje.

Da det er noget besværligt at konstruere fraktilplot manuelt, er det heldigt at de er bygget ind i mange CAS-værktøjer.

⁴Dette skyldes at fordelingsfunktionen for en normalfordeling aldrig vil antage værdien 1, men kun vil nærme sig 1, når $x \rightarrow \infty$.



Figur 4.9: Kvartilplottet for vægten af gulerødder.

4.5 Øvelser

Øvelse 4.1

I en bestemt matematiktest kan man få op til 100 point. Resultaterne af testen er normalfordelte med middelværdi 61 og spredning 12.

Bestem sandsynligheden for at en tilfældig valgt elev der tager testen får

- a) mellem 70 og 80 point
- b) mellem 50 og 100 point
- c) under 35 point
- d) over 90 point

Øvelse 4.2

Mænds højder er normalfordelte med en middelværdi på 181 cm og en spredning på 7 cm, mens kvinders højder er normalfordelte med en middelværdi på 167 cm og en spredning på 6 cm.

- a) Hvor stor en procentdel af mænd skal dukke sig hvis de går gennem en dør der er 185 cm høj?
- b) Hvor stor en procentdel af kvinder skal dukke sig hvis de går gennem en dør der er 185 cm høj?
- c) Hvor høj skal en dør være for at 95% af alle mænd kan gå gennem døren uden at dukke sig?

Øvelse 4.3

En snackproducent fremstiller poser med 250 g chips. Når en pose er fyldt, kontrolvejes inden de lukkes, og i 3% af tilfældene er der for få chips i posen.

På en bestemt dag, produceres der 1000 poser chips.

- a) Argumenter for at antallet af poser med for få chips kan approksimeres med en normalfordelt stokastisk variabel X .
- b) Bestem middelværdien og spredningen for X .
- c) Bestem $P(20 \leq X \leq 30)$.
- d) Bestem $P(X \leq 10)$.
- e) Bestem $P(X \geq 50)$.

Øvelse 4.4

En bestemt art af blomster har normalt 4 kronblade, men en variant har 5. For at estimere andelen p af den 5-bladede variant, udtages en stikprøve på 157 af disse blomster. 19 af dem har 5 kronblade.

- a) Bestem 95% konfidensintervallet for p .

Øvelse 4.5

Ved sidste kommunalvalg stemte 18% af borgerne i Nøvlebalde på Lokallisten. I en meningsmåling angiver 243 ud af 1015 adspurgte at de vil stemme på Lokallisten ved næste valg.

- a) Bestem et 95% konfidensinterval for Lokallistens andel af stemmerne.
- b) Har vælgertilslutningen til partiet ændret sig siden sidste valg?

Øvelse 4.6

I 2015 var 61% af eleverne på et bestemt gymnasium piger. I 2020 gik der 887 elever på dette gymnasium, og 578 af dem var piger.

- a) Afgør vha. et 95% konfidensinterval om andelen af piger på gymnasiet har ændret sig over de 5 år.

Øvelse 4.7

En gymnasieklasse tager en matematiktest hvor man kan få op til 100 point. Pointene i klassen fordeles sig således:

67,	43,	25,	14,	87,
45,	93,	60,	76,	41,
82,	32,	23,	66,	63,
57,	51,	73,	75,	46,
40,	35,	87,	93,	99.

- a) Hvad er middelværdien og spredningen af pointtallene?
- b) Afgør vha. et kvartilplot om pointtallene med god tilnærmelse er normalfordelte.

Bibliografi

- [1] Subhash Bagui og K. L. Mehra. »Convergence of binomial to normal: multiple proofs«. I: *International Mathematical Forum* 12.9 (2017), s. 399–411.
- [2] Richard F. Bass m.fl. *Upper level undergraduate probability with actuarial and financial applications*. University of Connecticut, Department of Mathematics, 2018.
- [3] Nicholas J. Cox. *Calculating percentile ranks or plotting positions*. URL: <https://www.stata.com/> (bes. 23.03.2020).
- [4] Claus Thorn Ekstrøm. *Selvfølgelig hedder det et test*. 27. jun. 2017. URL: <https://sandsynligvis.dk/2017/06/27/selvfoelgelig-hedder-det-et-test/> (bes. 23.03.2020).
- [5] Ian Fleming. *Dr. No*. Jonathan Cape, 1958.
- [6] Sue Gordon. *The Normal Distribution*. Mathematics Learning Centre: University of Sydney, 2006.
- [7] Victor J. Katz. *A History of Mathematics. An Introduction*. 2. udg. Addison-Wesley Educational Publishers, Inc., 1998.
- [8] Eckhard Limpert, Werner A. Stahel og Markus Abbt. »Log-normal Distributions across the Sciences: Keys and Clues«. I: *BioScience* 51.5 (2001), s. 341–352.