3.2 Regneregler for Integration – Ubestemt Integral

Sætning 3.2.1 (Regneregler for integration – ubestemt integral)

Regel (160) og (161) side 27 formelsamling A-niveau

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

Regel (159) side 27 i formelsamling A-niveau

$$\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx$$

Bevis:

Vi beviser regel (160) ved at differentiere og bruge reglen for differentiation af sum af funktioner

$$\left(\underline{\int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx}\right)' = \left(\int f(x)\, dx\right)' + \left(\int g(x)\, dx\right)' = \underline{f(x) + g(x)}$$

Dvs. $\int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$ er en stamfunktion til $f(x) + g(x)$.

Stamfunktionen til $f(x) + g(x)$ skrives som $\int \left(f(x) + g(x)\right) dx$, hvormed vi nu har vist, at

$$\int \left(f(x) + g(x)\right) dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

Beviset for regel (161) er som ovenstående blot med minus i stedet for plus.

Vi beviser regel (159) på samme vis ved at differentiere og bruge reglen for differentiation af konstant gange en funktion

$$\left(\underline{k \cdot \int f(x)\, dx}\right)' = k \cdot \left(\int f(x)\, dx\right)' = \underline{k \cdot f(x)}$$

Dvs. vi har vist at $k \cdot \int f(x)\, dx$ er en stamfunktion til $k \cdot f(x)$.

Stamfunktionen til $k \cdot f(x)$ skrives som $\int k \cdot f(x)\, dx$, hvormed vi nu har vist, at

$$\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx$$

Q.E.D

3.2 Regneregler for Integration – Bestemt Integral

Sætning 3.3.2 (Regneregler for Integration – Bestemt Integral)

Lad f være kontinuert på et interval der indeholder x-værdierne a og b. Så gælder der

Regel (166) + (167) side 27 i formelsamling for stx A-niveau

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

Regel (165) side 27 i formelsamling for stx A-niveau

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{hvor } k \in \mathbb{R}$$

Bevis:

Regel (166) Lad F og G være stamfunktioner til hhv. f og g. Så får vi ved brug af regel (160), som vi har bevist

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx \overset{\text{Regel (160)}}{=} [F(x) + G(x)]_a^b = \big(F(b) + G(b)\big) - \big(F(a) + G(a)\big)$$

$$= F(b) + G(b) - F(a) - G(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

hvilket beviser regel (166).

Regel (167) Lad F og G være stamfunktioner til hhv. f og g. Så får vi ved brug af regel (161), som vi har bevist

$$\int_a^b f(x) - g(x)\,dx \overset{\text{Regel (161)}}{=} [F(x) - G(x)]_a^b = \big(F(b) - G(b)\big) - \big(F(a) - G(a)\big)$$

$$= F(b) - G(b) - F(a) + G(a) = F(b) - F(a) - \big(G(b) - G(a)\big)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

hvilket beviser regel (167).

Regel (165) Lad F være stamfunktioner til f. Så får vi ved brug af regel (159), som vi har bevist

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx \overset{\text{Regel (159)}}{=} [k \cdot F(x)]_a^b = k \cdot F(b) - k \cdot F(a) = k \cdot \big(F(b) - F(a)\big) = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

hvilket beviser regel (165).

Q.E.D

(1) Brug 20 minutter på at forstå og gennemgå ovenstående bevis i de grønne to-mands-grupper.
(2) Brug 20 minutter på at gennemgå beviset skiftevis for hinanden i de røde to-mands-grupper.

	Stephan **Nanna Lise**	**Caroline** **Nikoline**	**Mads** **Frederik** **Kamille**	**Stephan** **Lucas**
Anna **Thea**	Anna + Stephan Thea + Nanna Lise			
Camilla **Katrine**		Camilla + Caroline Katrine + Nikoline		
Christian **Gustav** **Sally**			Christian + Mads Gustav + Frederik Sally + Kamille	
Christoffer **Storm** **Felix**				Christoffer + Stephan Storm + Lucas + Felix