

### 3. Dobbelpunkter

Et dobbelpunkt for en banekurve er et punkt  $Q$ ,  
hvor  $\overrightarrow{OQ} = \vec{s}(t_1) = \vec{s}(t_2)$  for to forskellige værdier af  $t_1$  og  $t_2$ .  
Dvs. det er et punkt som banekurven går igennem to gange.

#### Eksempel 3.1 Bestem dobbelpunkt

Vi ser på vektorfunktionen  $\vec{s}$  givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 3 \\ t^3 - 4t + 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

og den tilhørende banekurve.

Det bemærkes, at der er et dobbelpunkt i punktet  $P(1,2)$ .

For at beregne sig frem til dobbelpunktet gøres følgende.

**1) Indsæt to forskellige ukendte parametre  $t_1$  og  $t_2$  i  $x(t)$  og  $y(t)$  og sæt dem lig hinanden. Hermed fremkommer to ligninger med to ubekendte**

1.  $t_1^2 - 3 = t_2^2 - 3$
2.  $t_1^3 - 4 \cdot t_1 + 2 = t_2^3 - 4 \cdot t_2 + 2$

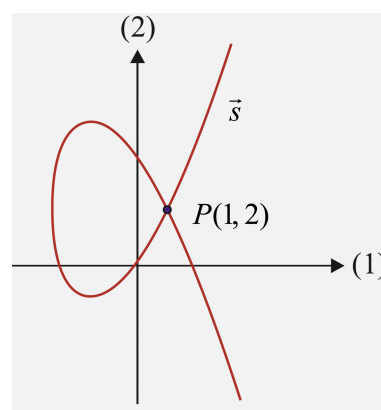
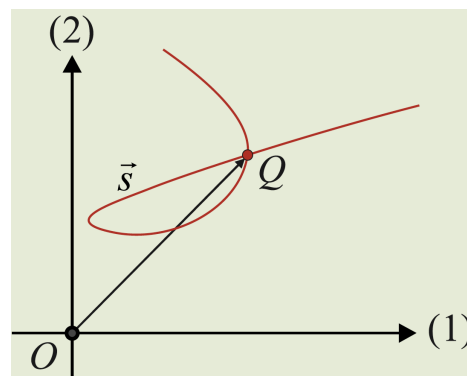
**2) Løs ligningssystemet med Maple eller ved håndkraft (lige store koefficienter eller substitutionsmetoden)**

$$\text{fsolve}\left(\left[t_1^2 - 3 = t_2^2 - 3, t_1^3 - 4 \cdot t_1 + 2 = t_2^3 - 4 \cdot t_2 + 2\right]\right) \\ \{t_1 = 2.000000000, t_2 = -2.000000000\}$$

Indsættes de to  $t$ -værdier i  $\vec{s}(t)$  fås dobbelpunktet.

$$\vec{s}(-2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{s}(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dobbelpunktet er hermed vist til at være  $P(1,2)$ .



## Opgaver

### Opgave 3.1 (MED hjælpemidler)

En vektorfunktion er givet ved forskriften

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 - 4 \cdot t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

a) Tegn banekurven for  $\vec{s}(t)$ .

Banekurven har et dobbelpunkt.

b) Bestem de to  $t$ -værdier, hvor banekurven befinder sig i dobbelpunktet.

c) Bestem koordinatsættet til dobbelpunktet.

### Opgave 3.2 (MED hjælpemidler)

En vektorfunktion er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 3t \\ -t^4 + 4 \cdot t^2 \end{pmatrix}, t \in [-2.25, 2.25]$$

a) Tegn banekurven for  $\vec{s}(t)$ .

b) Bestem banekurvens skæringspunkter med  $y$ -aksen.

Det ses, at banekurven for  $\vec{s}(t)$  har tre dobbelpunkter.

b) Bestem koordinatsættene til dobbelpunkterne.

### Opgave 3.3 (MED hjælpemidler)

En vektorfunktion er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 12t \\ t^2 - 2 \cdot t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

a) Bestem koordinatsættene til banekurvens skæringspunkter med  $x$ -aksen.

På banekurven for  $\vec{s}(t)$  er punktet  $Q$  et dobbelpunkt hørende til  $t$ -værdierne  $t = -2$  og  $t = t_0$ .

b) Bestem koordinatsættet til  $Q$ , og bestem  $t_0$ .

