

4. Differentiabilitet af vektorfunktioner

Definition (Differentiabilitet af vektorfunktioner)

En vektorfunktion $\vec{s}(t)$ kaldes differentiabel i $t_0 \in I$, hvis begge koordinatfunktionerne $x(t)$ og $y(t)$ er differentiable i t_0 – hvor I er et interval.

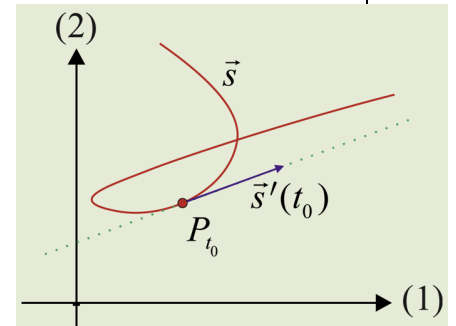
Differentialkvotienten $\vec{s}'(t_0)$ defineres som

$$\vec{s}'(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$$

og er *tangentvektor* til banekurven i punktet P_{t_0} .

Hvis $\vec{s}(t)$ er differentiabel for alle t_0 , kaldes $\vec{s}(t)$ differentiabel, og $\vec{s}'(t)$ kaldes den afledede funktion

$$\vec{s}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$



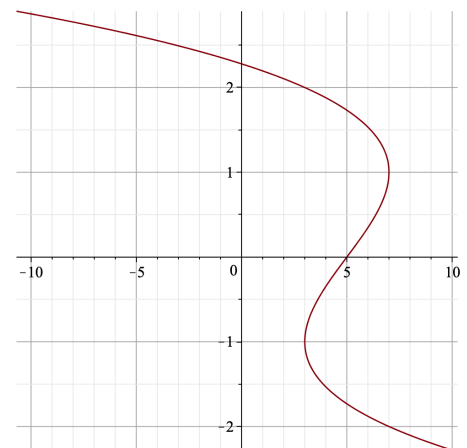
Eksempel 4.1

En vektorfunktion $\vec{s}(t)$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} -t^3 + 3t + 5 \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Differentialkvotienten for $\vec{s}(t)$ bestemmes ved at differentiere koordinatfunktionerne hver for sig

$$\vec{s}'(t) = \begin{pmatrix} -3t^2 + 3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$



I Maple finder jeg let differentialkvotienten for $\vec{s}(t)$ ved først at definere $\vec{s}(t)$ og så differentiere

$$\vec{s}(t) := \langle -t^3 + 3t + 5, t \rangle$$

$$\vec{s} := t \mapsto \langle -t^3 + 3 \cdot t + 5, t \rangle$$

$$\vec{s}'(t) = \begin{bmatrix} -3t^2 + 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Opgave 4.1 (UDEN hjælpemidler)

Bestem differentialkvotienten til vektorfunktion

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cdot \cos(t) \\ e^t \cdot \sin(t) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Opgave 4.2 (MED hjælpemidler)

En vektorfunktion er givet ved forskriften

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \cdot \cos(t) \\ 6 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$

Parameterkurven for $\vec{s}(t)$ er en cirkel.

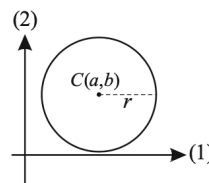
a) Bestem centrum og radius i cirklen ved at se på formel (190) i formelsamling stx A på side 32.

b) Bestem $\vec{s}(0)$ og $\vec{s}(\pi)$.

c) Tegn banekurven for $\vec{s}(t)$.

d) Bestem $\vec{s}'(t)$

e) Bestem $\vec{s}'(0)$ og $\vec{s}'\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Kommenter resultaterne.



Parameterfremstillingen for en cirkel med centrum $C(a, b)$ og radius r

$$(190) \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

Opgave 4.3 (MED hjælpemidler)

En vektorfunktion er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} -t^2 + 4 \\ 0.1t^3 + 0.2 \cdot t^2 - 5 \end{pmatrix}, t \in [-5, 5]$$

a) Tegn banekurven for $\vec{s}(t)$.

b) Bestem tidspunkterne t_1, t_2 og t_3 til parameterkurvens tre skæringer med akserne.

c) Bestem $\vec{s}'(t)$

d) Bestem $\vec{s}'(t_1), \vec{s}'(t_2)$ og $\vec{s}'(t_3)$.

e) Overvej hvordan resultaterne passer sammen med parameterkurven tegnet i spørgsmål a).