

1. Funktioner og grafer

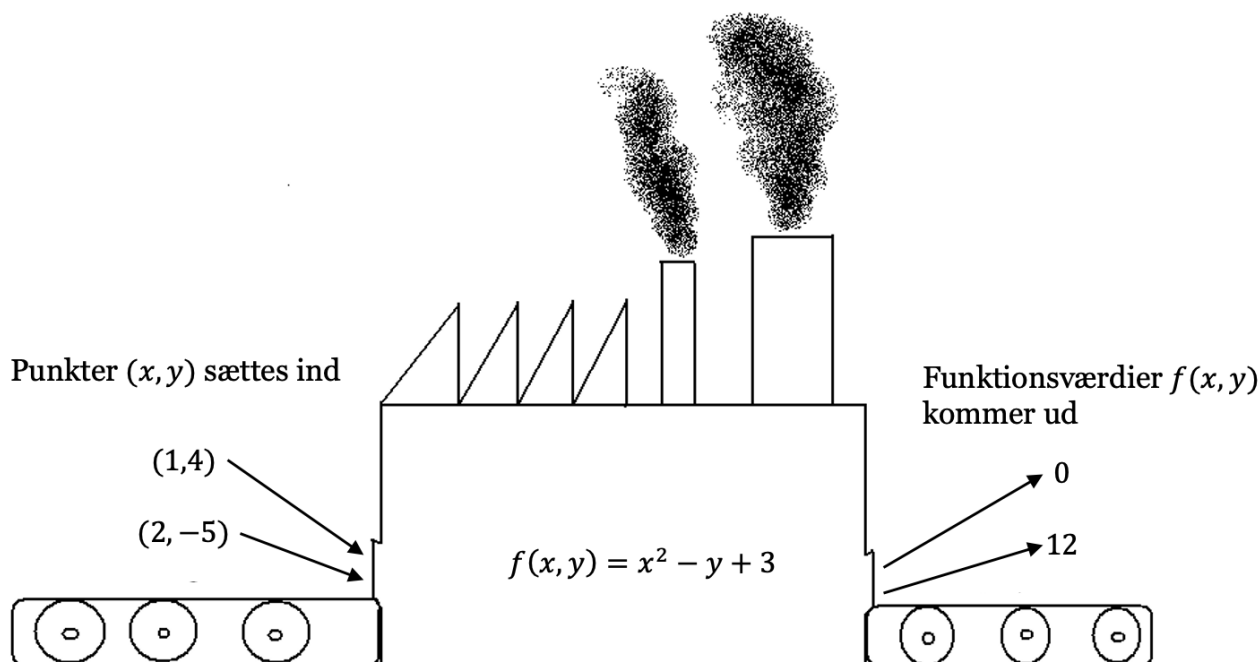
Definition 1.1 Funktion af to variable

En funktion f af to variable er en funktion som til et par af variable (x, y) knytter et tal $f(x, y)$.

Dvs. en funktion af to variable er en funktion, hvor definitionsmængden (det vi putter ind i funktionen) består af to uafhængige variable x og y . Sagt med andre ord er en funktion af to variable blot en funktion, hvor definitionsmængden består af en mængde af punkter (og ikke tal som vi er vant til med funktioner af en variabel).

Eksempel 1.2

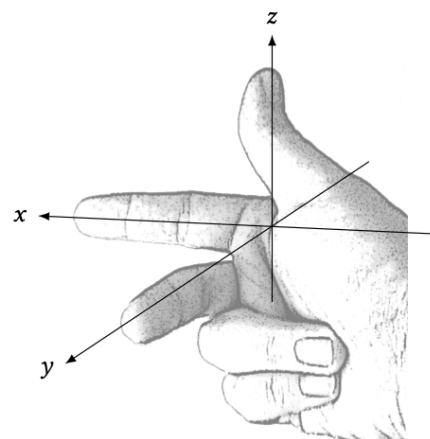
Vi ser på funktionen $f(x, y) = x^2 - y + 3$. Hvor vi ønsker at udregne funktionsværdierne til punkterne $(1, 4)$ og $(2, -5)$.



$$f(1, 4) = 1^2 - 4 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$

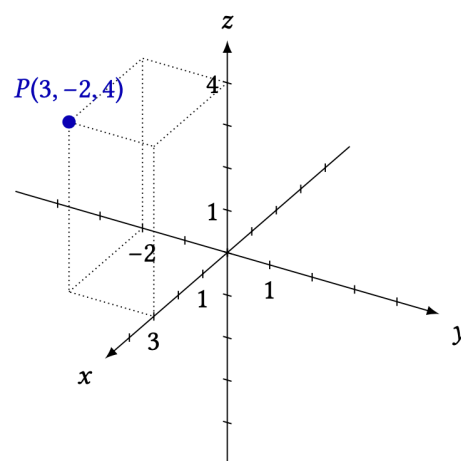
$$f(2, -5) = 2^2 - (-5) + 3 = 4 + 5 + 3 = 12$$

Når vi skal tegne grafen for en funktion af to variable, skal vi bruge et koordinatsystem med tre akser: en x -akse, en y -akse og en z -akse. Vi kalder det *et tredimensionalt koordinatsystem*. Den tredje z -akse står vinkelret på x - og y -aksen og kan pege to veje. Vi vælger at den ”peger ud af papirer”. Vi siger, at vi vælger et *højre koordinatsystem* idet vi bruger højre hånd, hvor vi lægger pegefingeren i x -aksens retning, langfingeren i y -aksens retning og tommelfingeren i z -aksens retning.



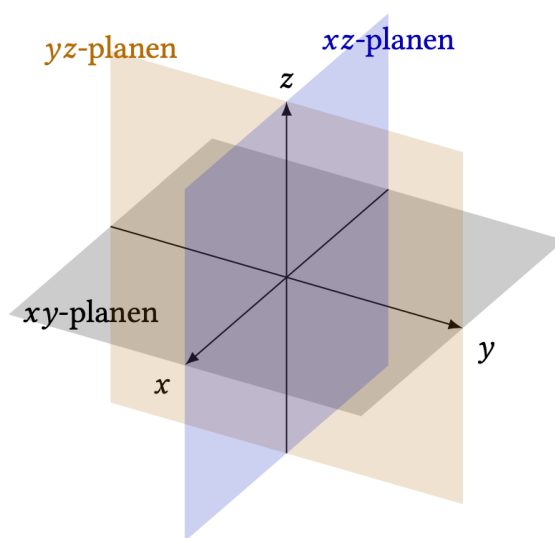
Et $P(x, y, z)$ i et tredimensionalt koordinatsystem har således tre koordinater.

På figuren ses punktet $P(3, -2, 4)$.



(a) Punktet $P(3, -2, 4)$.

De tre akser i koordinatsystemet udpeger på samme vis tre forskellige planer.



(b) xy -, xz - og yz -planen.

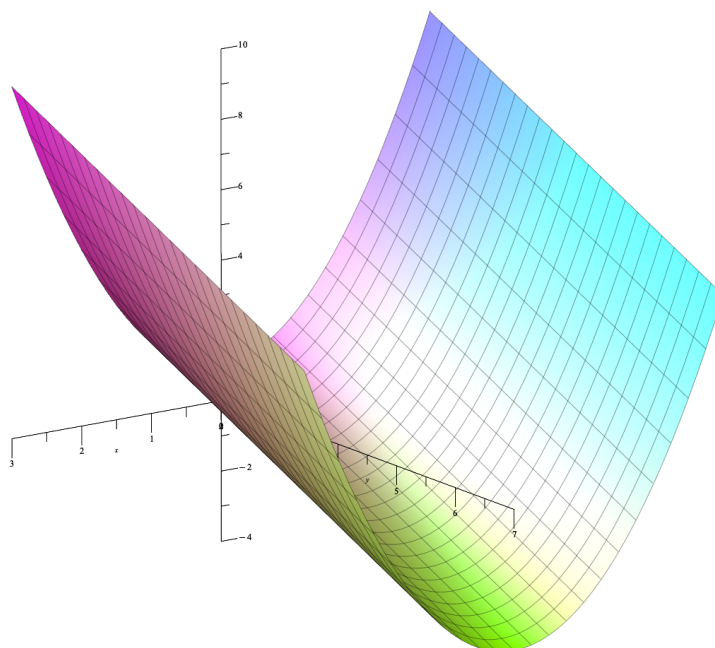
Eksempel 1.3

Vi tegner grafen for funktionen $f(x, y) = x^2 - y + 3$ ved brug af Maple

$$f(x, y) := x^2 - y + 3$$

$$f := (x, y) \mapsto x^2 - y + 3$$

$$\text{plot3d}(f(x, y))$$

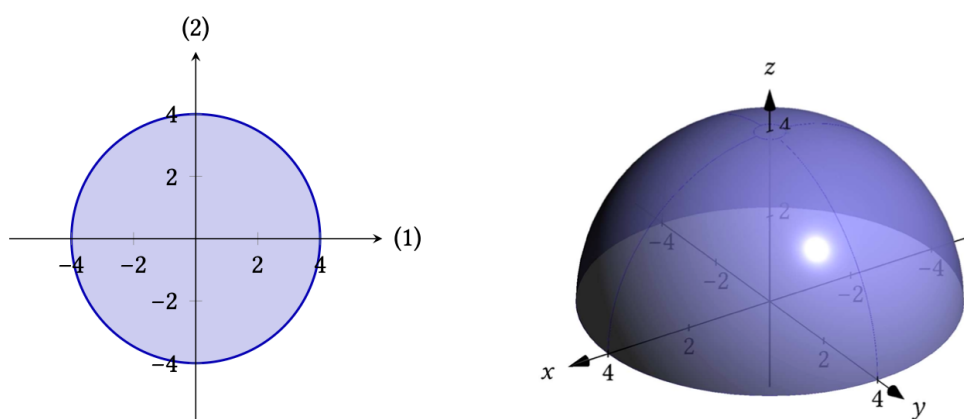


Eksempel 1.4

Vi ønsker at tegne grafen for funktionen $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2} = \sqrt{16 - (x^2 + y^2)}$

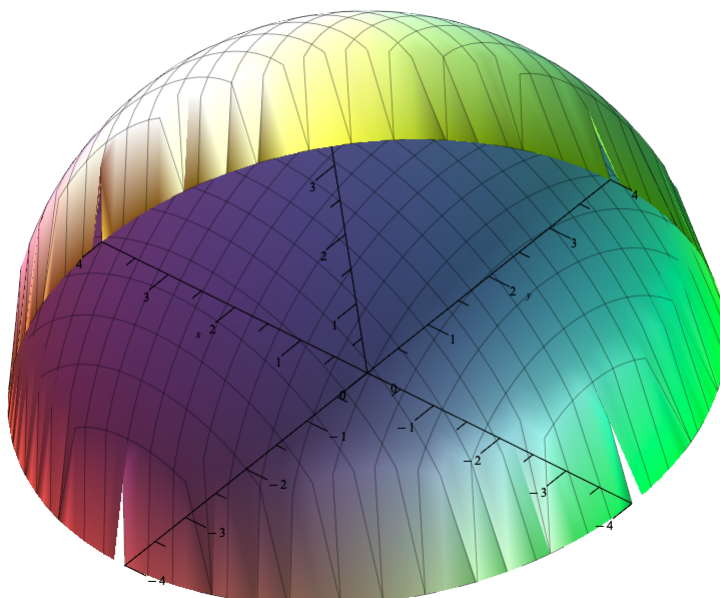
Før vi kan tegne grafen for denne funktion, kræver det, at vi ved hvad definitionsmængden er. Vi ved vi ikke kan tage kvadratroden af et negativt tal, hvorfor definitionsmængden er givet ved

$$Dm(f) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$$



Definitionsmængden består med andre ord af de punkter, der ligger indenfor cirklen med centrum $C(0,0)$ og radius 4 fordi $x^2 + y^2 = 16 \Leftrightarrow (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 16$

Prøv selv at plotte funktionen for denne i Maple og drej figuren (husk at højreklikke og vælg "Scaling Constrained").



Opgaveregning

UDEN HJÆLPEMIDLER

Øvelse 1.1

Funktionen f er givet ved

$$f(x, y) = x^2 - xy + 4x .$$

- a) Bestem $f(3, 2)$ og $f(-4, 1)$.
- b) Løs ligningen $f(1, y) = 17$.
- c) Løs ligningen $f(x, 3) = 6$.

Øvelse 1.2

Funktionen f er givet ved

$$f(x, y) = \frac{2y}{x^2 + 3} .$$

- a) Bestem koordinaterne til punktet $P(1, 5, f(1, 5))$.
- b) Brug et CAS-værktøj til at tegne grafen for f samt punktet P .

MED HJÆLPEMIDLER

Øvelse 1.3

Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x, y) = \sqrt{7 - x^2 + y^2} .$$

- a) Tegn grafen for f .
- b) Beregn $f(1, 1)$, $f(-1, 2)$, $f(3, 4)$, og afsæt de tilsvarende punkter på grafen.

Øvelse 1.4

Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x, y) = x + y^2 - 3xy .$$

Afgør hvilke af de nedenstående punkter der ligger på grafen:

- a) $A(1, 1, -1)$
- b) $B(0, 5, 6)$
- c) $C(3, 2, 5)$
- d) $D(2, 4, -6)$

Øvelse 1.5

Bestem definitionsområdet for funktionen

$$f(x, y) = \ln(5 - x^2 + y) ,$$

og illustrer mængden i xy -planen vha. et CAS-værktøj.

Øvelse 1.6

Bestem definitionsområdet for funktionerne

a) $f(x, y) = \sqrt{x} + y + 5$

b) $g(x, y) = \ln(3x) + \frac{1}{y}$

c) $h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$