

Funktioner af to variable

3. Højde og niveaukurver



Eksempel 3.1 – Tegn grafen

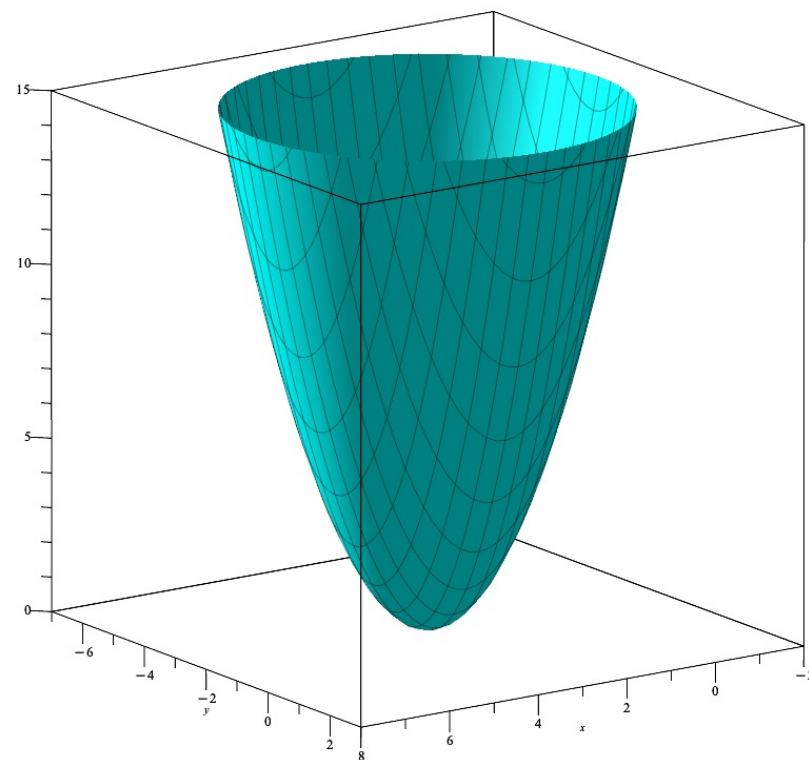
$$f(x, y) = (x - 3)^2 + (y + 2)^2$$

Definer funktionen og tegn grafen

with(Gym) : Vi kan se at funktionen har et
with(plots) : minimum i $(3, -2)$ med z-værdien 0.

$$f(x, y) := (x - 3)^2 + (y + 2)^2$$

$$f := (x, y) \mapsto (x - 3)^2 + (y + 2)^2$$



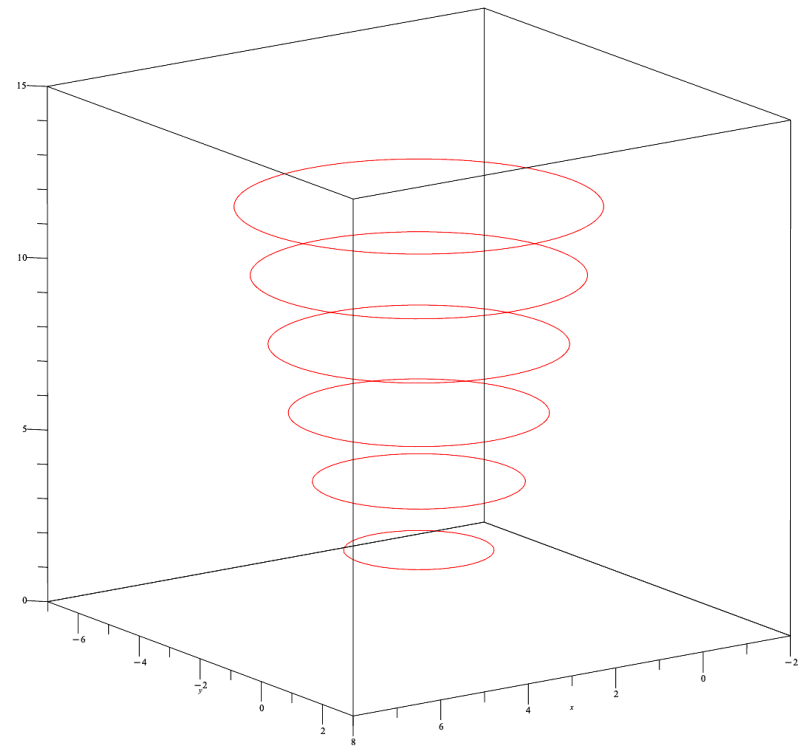
$flade := plot3d(f(x, y), x = -2 .. 8, y = -7 .. 3, view = 0 .. 15, color = cyan)$

Eksempel 3.1 – Tegn højdekurver

$$f(x, y) = (x - 3)^2 + (y + 2)^2$$

Højdekurver er vandrette snit
igennem fladen (hold z fast)

Vi indtegner højdekurver svarende til
 z -værdierne 2, 4, 6, 8, 10, 12.



```
hoejde := plot3d(f(x, y), x=-2..8, y=-7..3, view=0..15, style=contour, color=red, contours=[2, 4, 6, 8, 10, 12])
```

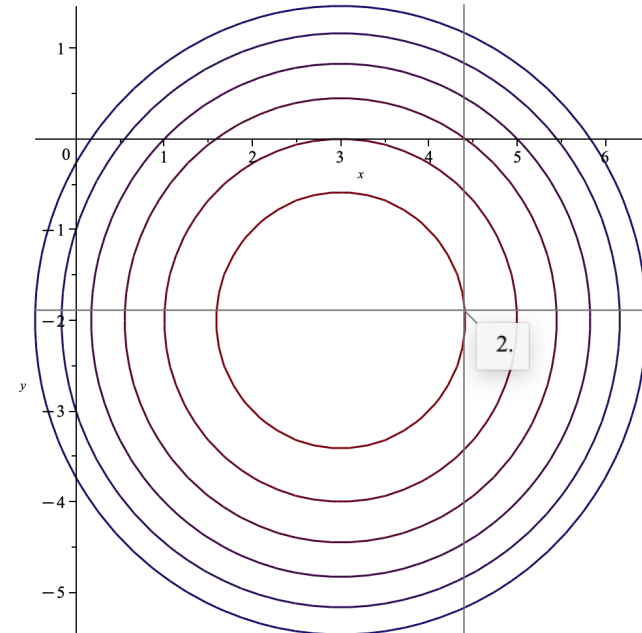
Eksempel 3.1 – Tegn niveaukurer i 2D

$$f(x, y) = (x - 3)^2 + (y + 2)^2$$

Niveaukurver er højdekurver
projiceret ned i xy -planen.
 z -værdien holdes fast

Plottet kaldes en *konturplot*

Når vi holder cursoren hen over
en af niveaukurverne angiver
Maple højde i z -aksens retning.



```
niveau2D := niveaukurver(f(x, y), x = -2 .. 8, y = -7 .. 3, konturer = [2, 4, 6, 8, 10, 12])
```

```
niveau2D := contourplot(f(x, y), x = -2 .. 8, y = -7 .. 3, contours = [2, 4, 6, 8, 10, 12])
```

Eksempel 3.1 – Tegn niveaukurer i 3D

$$f(x, y) = (x - 3)^2 + (y + 2)^2$$

$$f(x, y) = 2 \Leftrightarrow f(x, y) - 2 = 0$$

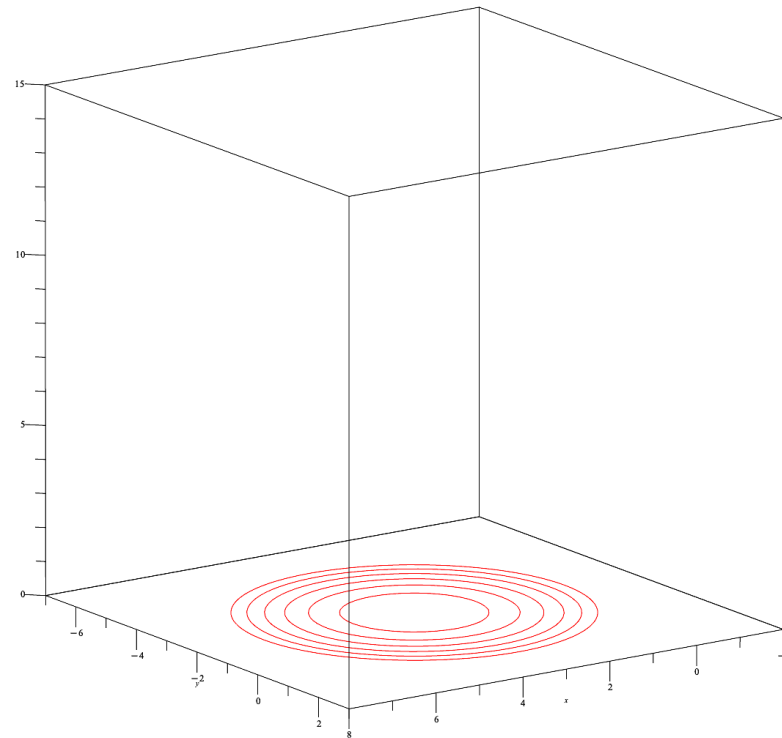
$$f(x, y) = 4 \Leftrightarrow f(x, y) - 4 = 0$$

$$f(x, y) = 6 \Leftrightarrow f(x, y) - 6 = 0$$

$$f(x, y) = 8 \Leftrightarrow f(x, y) - 8 = 0$$

$$f(x, y) = 10 \Leftrightarrow f(x, y) - 10 = 0$$

$$f(x, y) = 12 \Leftrightarrow f(x, y) - 12 = 0$$



```
niveau3D := plot3d( [seq( f(x, y) - i, i = [2, 4, 6, 8, 10, 12] ) ], x = -2 .. 8, y = -7 .. 3, view = 0 .. 15, style = contour, color = red, contours = [0] )
```

Eksempel 3.1 – det hele i samme plot

$$f(x, y) = (x - 3)^2 + (y + 2)^2$$

$$f(x, y) = 2 \Leftrightarrow f(x, y) - 2 = 0$$

$$f(x, y) = 4 \Leftrightarrow f(x, y) - 4 = 0$$

$$f(x, y) = 6 \Leftrightarrow f(x, y) - 6 = 0$$

$$f(x, y) = 8 \Leftrightarrow f(x, y) - 8 = 0$$

$$f(x, y) = 10 \Leftrightarrow f(x, y) - 10 = 0$$

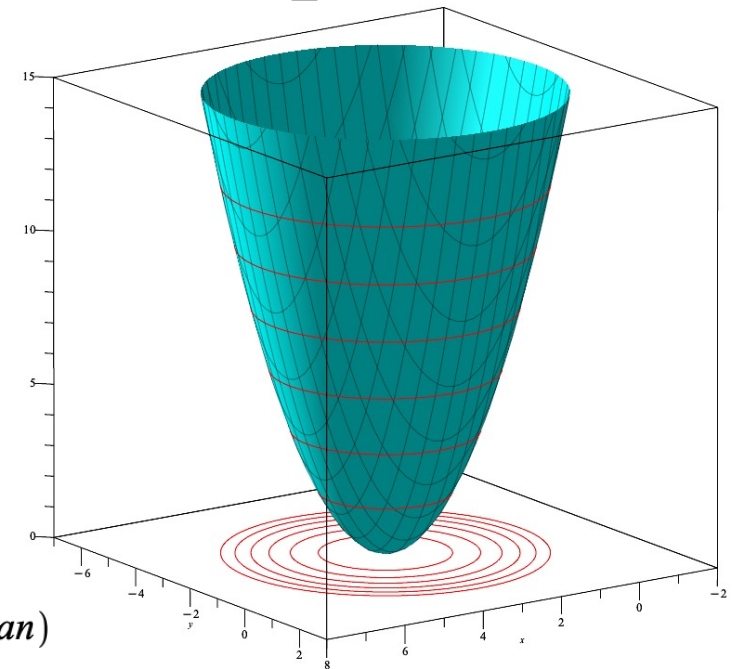
$$f(x, y) = 12 \Leftrightarrow f(x, y) - 12 = 0$$

flade := *plot3d*(*f*(*x*, *y*), *x* = -2 .. 8, *y* = -7 .. 3, *view* = 0 .. 15, *color* = cyan)

hoejde := *plot3d*(*f*(*x*, *y*), *x* = -2 .. 8, *y* = -7 .. 3, *view* = 0 .. 15, *style* = *contour*, *color* = red, *contours* = [2, 4, 6, 8, 10, 12])

niveau3D := *plot3d*([*seq*(*f*(*x*, *y*) - *i*, *i* = [2, 4, 6, 8, 10, 12])], *x* = -2 .. 8, *y* = -7 .. 3, *view* = 0 .. 15, *style* = *contour*, *color* = red, *contours* = [0])

display(*flade*, *hoejde*, *niveau3D*)



Opgaverregning

Øvelse 3.1

Bestem en ligning for niveaukurven $f(x, y) = 3$ for funktionen

$$f(x, y) = x^2 + 2y.$$

Hvilken type figur er denne niveaukurve?

Tegn et 3D-plot af grafen (fladen), højdekurven $z = 3$ og niveaukurven.

Øvelse 3.2

Funktionen f er givet ved

$$f(x, y) = x(y - 1) - \frac{1}{4}y^2.$$

a) Tegn et konturplot for $z = -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

b) Brug Maple til at tegne grafen (fladen), højdekurverne $z = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ og niveaukurven.

Øvelse 3.3 Benyt Maple til at tegne niveaukurverne for følgende 3 funktioner

$$f(x) = \ln(x^2 + y^2)$$

$$g(x) = x^2 - y^2$$

$$h(x) = \cos(x) \cdot \cos(y) \cdot e^{-\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{4}}$$

Ud fra niveaukurverne snakkes nu om grafernes forløb. Til sidst tegnes graferne for de tre funktioner, og der sammenlignes med jeres observationer.

