Bevis for formlen for annuitetsopsparing

Sætning – dvs. den påstand vi efterfølgende skal bevise
Hvis man indbetaler det samme beløb b hver termin, og rentefoden er r, så er kapitalen A umiddelbart efter den n'te indbetaling:

$$A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Bevis
Sætningen bevises gennem et eksempel - det er forholdsvis enkelt at generalisere ud fra eksemplet. I eksemplet er

$b = 700$, $r = 0{,}06$ og $n = 4$.

Vi skal se på saldoen umiddelbart efter hver indbetaling.

1. indbetaling: $A_1 = 700$
2. indbetaling: $A_2 = A_1 \cdot 1{,}06 + 700$
$= 700 \cdot 1{,}06 + 700$
3. indbetaling: $A_3 = A_2 \cdot 1{,}06 + 700$
$= (700 \cdot 1{,}06 + 700) \cdot 1{,}06 + 700$
$= 700 \cdot 1{,}06^2 + 700 \cdot 1{,}06 + 700$
4. indbetaling: $A_4 = A_3 \cdot 1{,}06 + 700$
$= (700 \cdot 1{,}06^2 + 700 \cdot 1{,}06 + 700) \cdot 1{,}06 + 700$
$= 700 \cdot 1{,}06^3 + 700 \cdot 1{,}06^2 + 700 \cdot 1{,}06 + 700$ (1)

Ved at sætte 700 uden for parentes i får vi:

$$A = 700 \cdot (1{,}06^3 + 1{,}06^2 + 1{,}06 + 1)$$

Vi skal have omskrevet udtrykket i parentesen, så vi kalder det for S:

$$S = 1{,}06^3 + 1{,}06^2 + 1{,}06 + 1 \qquad (2)$$

Vi har altså at

$$A = 700 \cdot S \qquad (3)$$

Af (2) kan man få:

$$\begin{aligned} S \cdot 1{,}06 &= (1{,}06^3 + 1{,}06^2 + 1{,}06 + 1) \cdot 1{,}06 \\ &= 1{,}06^4 + 1{,}06^3 + 1{,}06^2 + 1{,}06 \qquad (4) \end{aligned}$$

Det viser sig at være smart hvis man trækker (2) fra (4) – det gør vi så:

$$\begin{aligned} S \cdot 1{,}06 - S &= 1{,}06^4 + 1{,}06^3 + 1{,}06^2 + 1{,}06 - (1{,}06^3 + 1{,}06^2 + 1{,}06 + 1) \\ &= 1{,}06^4 + 1{,}06^3 + 1{,}06^2 + 1{,}06 - 1{,}06^3 - 1{,}06^2 - 1{,}06 - 1 \\ &= 1{,}06^4 - 1. \end{aligned}$$

Altså har vi: $S \cdot 1{,}06 - S = 1{,}06^4 - 1.$ (5)

Vi kan omskrive dette på følgende måde:

$$S \cdot 1{,}06 - S = S \cdot (1 + 0{,}06) - S = S + S \cdot 0{,}06 - S = S \cdot 0{,}06$$

Altså har vi: $S \cdot 1{,}06 - S = S \cdot 0{,}06$
Dette kan vi indsætte i (5):

$$S \cdot 0{,}06 = 1{,}06^4 - 1$$

$$S = \frac{1{,}06^4 - 1}{0{,}06}$$

Når vi indsætter dette i (3), får vi den endelige formel:

$$A = 700 \cdot \frac{1{,}06^4 - 1}{0{,}06}$$

Beviset kan gøres generelt ved at udskifte 700 med *b* og 1,06 med (1+ *r*).