UNDERVISNINGS MINISTERIET
STYRELSEN FOR UNDERVISNING OG KVALITET

Matematik A

Studentereksamen

Ny ordning

2018 - Vejledende opgavesæt 1

ny-stx-MAT/A

Varighed: 5 timer

Opgavesættet er delt i to dele:

Delprøve 1: 2 timer kun med den centralt udmeldte formelsamling.
Delprøve 2: 3 timer med alle hjælpemidler.

Delprøve 1 består af opgave 1-11.

Delprøve 2 består af opgave 12-19.

Pointtallet er angivet ud for hvert spørgsmål.

Der gives i alt 250 point.

En del af spørgsmålene er knyttet til mindstekravene.
Disse spørgsmål er markeret med grøn farve.

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen.
I bedømmelsen af helhedsindtrykket af besvarelsen af de enkelte opgaver lægges særlig vægt på følgende fire punkter:

- *Redegørelse og dokumentation for metode*
  Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte løsningsstrategi med dokumentation i form af et passende antal mellemregninger eller matematiske forklaringer på metoden, når et matematisk værktøjsprogram anvendes.

- *Figurer, grafer og andre illustrationer*
  Besvarelsen skal indeholde hensigtsmæssig brug af figurer, grafer og andre illustrationer, og der skal være tydelige henvisninger til brug af disse i den forklarende tekst.

- *Notation og layout*
  Besvarelsen skal i overensstemmelse med god matematisk skik opstilles med hensigtsmæssig brug af symbolsprog. Hvis der anvendes matematisk notation, der ikke hører til standardviden, skal der redegøres for betydningen.

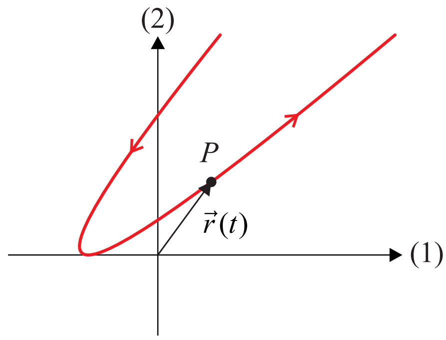
- *Formidling og forklaring*
  Besvarelsen af rene matematikopgaver skal indeholde en angivelse af givne oplysninger og korte forklaringer knyttet til den anvendte løsningsstrategi beskrevet med brug af almindelig matematisk notation.
  Besvarelsen af opgaver, der omhandler matematiske modeller, skal indeholde en kort præsentation af modellens kontekst, herunder betydning af modellens parametre. De enkelte delspørgsmål skal afsluttes med en præcis konklusion præsenteret i et klart sprog i relation til konteksten.

Delprøve 1

Kl. 09.00 – 11.00

Opgave 1 I et koordinatsystem bevæger et punkt P sig således, at til tidspunktet t er stedvektoren $\vec{r}(t)$ til P er givet ved

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} t^2+t-2 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad -4 \le t \le 4.$$



(10 point) a) Bestem hastighedsvektoren til tidspunktet $t=2$.

Opgave 2 En funktion f er bestemt ved

$$f(x)=3x^2+2x+1 \ .$$

(10 point) a) Bestem $\int_1^2 f(x)\,dx$.

Opgave 3 En vektor $\vec{v}$ og en matrix M er givet ved

$$\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ og } M=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

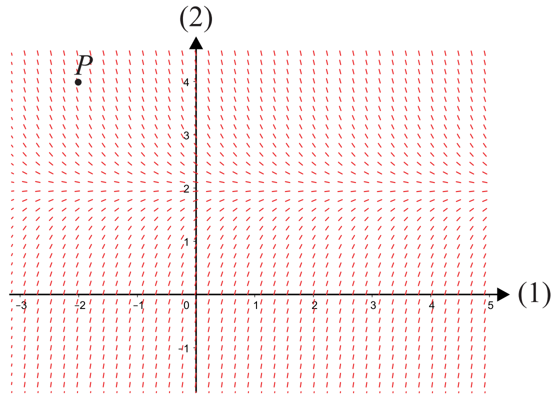
(10 point) a) Bestem $M^2 \cdot \vec{v}$.

Opgave 4 I en model kan udviklingen af træmassen i en bestemt skov beskrives ved en funktion M, hvor $M(t)$ betegner træmassen (målt i kg) til tidspunktet t (målt i år). I modellen er væksthastigheden i træmassen proportional med træmassen. Det oplyses, at proportionalitetskonstanten er $1{,}04$.

(5 point) a) Opskriv en differentialligning, som M må opfylde.

Opgave 5 På figuren ses hældningsfeltet hørende til en differentialligning.

Til opgaven hører et bilag

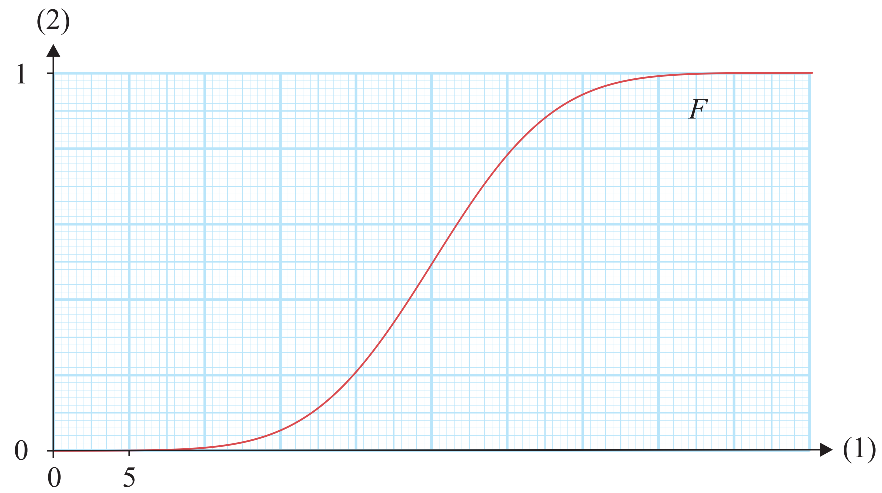


(5 point) a) Skitsér den løsningskurve, der går gennem punktet $P(-2,4)$.

Vedlagte bilag kan indgå i besvarelsen.

Opgave 6 En bestemt type korn hældes i poser. Vægten af de enkelte poser med korn noteres. Den stokastiske variabel X angiver den faktiske vægt af korn i en pose (målt i kg). Det oplyses, at X er normalfordelt. På figuren ses grafen for fordelingsfunktionen F for X.

Til opgaven hører et bilag



(10 point) a) Bestem $E(X)$, og forklar betydningen af dette tal.

Vedlagte bilag kan indgå i besvarelsen.

Opgave 7 En funktion f er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 3x + 1.$$

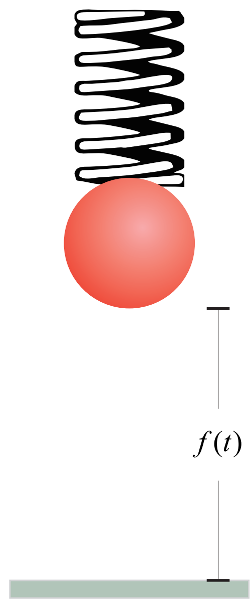
Grafen for f går gennem punktet $P(2,6)$.

(10 point) a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i P.

Opgave 8 En bold er ophængt i en fjeder i et lokale. Bolden svinger langsomt op og ned. Boldens bevægelse kan beskrives ved den trigonometriske funktion givet ved

$$f(t) = 3 \cdot \sin(\tfrac{1}{2}\pi \cdot t) + 5\,,$$

hvor $f(t)$ betegner boldens afstand over gulvet (målt i dm) til tidspunktet t (målt i sekunder).



(5 point) a) Bestem perioden T for boldens svingning.

(10 point) b) Tegn grafen for f over to perioder.

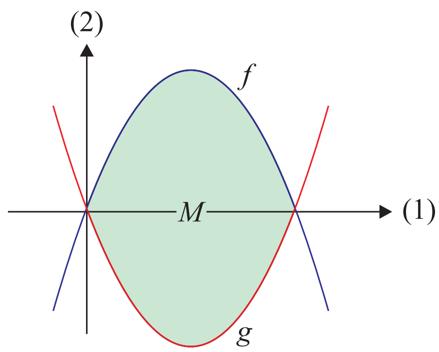
Opgave 9 En funktion f er givet ved

$$f(x) = (x^2 - 5x + 6) \cdot \ln(x^2 + 1)\,.$$

(10 point) a) Bestem $f'(0)$.

(10 point) b) Løs ligningen $f(x) = 0$.

Opgave 10 På figuren ses en skitse af graferne for to funktioner f og g.



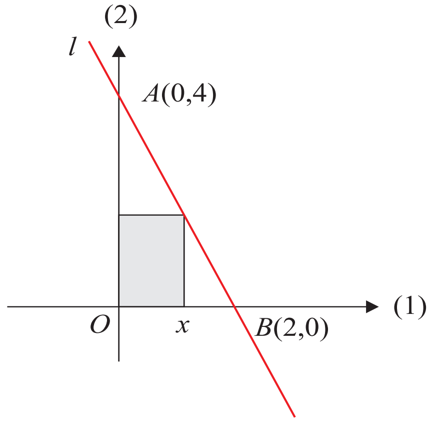
Graferne for f og g afgrænser en punktmængde M, der har et areal.

Tabellen viser nogle funktionsværdier for funktionerne f, g, F og G, hvor F og G betegner henholdsvis en stamfunktion til f og en stamfunktion til g .

x	0	1	2
$f(x)$	0	49	0
$g(x)$	0	-47	0
$F(x)$	0	36	66
$G(x)$	0	-34	-62

(10 point) a) Bestem arealet af M.

Opgave 11 På figuren ses en ret linje l gennem punkterne A og B. Desuden er et rektangel indskrevet i trekant OAB som vist på figuren.



(10 point) a) Bestem arealet af rektanglet som funktion af x.

(5 point) b) Bestem den værdi af x, der gør arealet af rektanglet størst muligt.

Besvarelsen afleveres kl. 11.00

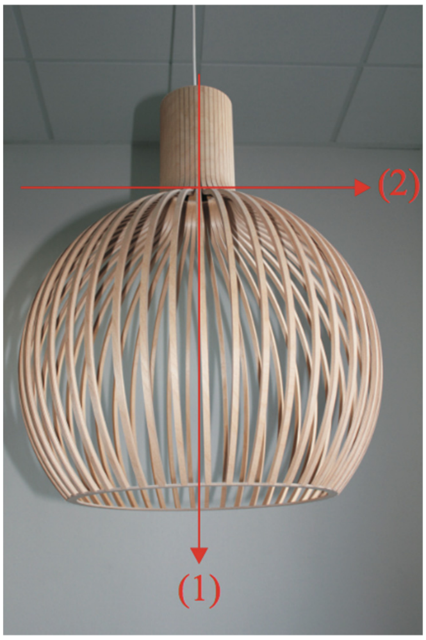
Delprøve 2

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 12 En funktion f er givet ved

$$f(x)=\begin{cases} 6, & -15 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{-x^2+52x+36}, & 0 < x \leq 44. \end{cases}$$

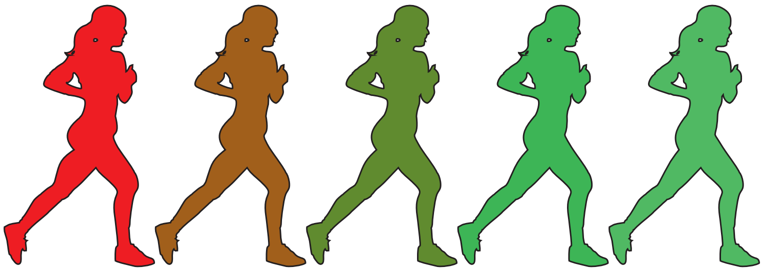
I en model danner grafen for f en kurve, der har samme form som hver af de 47 lameller, der udgør lampen på billedet nedenfor. Alle mål er i cm.



(10 point) a) Tegn grafen for f.

(5 point) b) Bestem længden af den krumme del af én af de 47 lameller.

Opgave 13



En kvinde har gennem en periode i forbindelse med sine løbeture noteret sammenhørende værdier af den gennemsnitlige løbetid pr. km og sin vægt umiddelbart før løbeturen. Resultaterne fremgår af tabellen nedenfor.

Til opgaven hører et bilag.

Vægt (kg)	83,1	83,0	…	75,5	75,2
Gennemsnitlig løbetid pr. km (minutter)	6,59	6,49	…	6,29	6,23

(*Resten af tabellen findes i bilaget: " stxA1 Bilag 1 Opgave 13 Data for løb.xlsx*")

I en model antages det, at den gennemsnitlige løbetid pr. km (målt i minutter) som funktion af vægten (målt i kg) kan beskrives ved en lineær funktion. Modellen bestemmes ved lineær regression på tabellens data.

(10 point) a) Benyt residualplottet til at vurdere modellen.

(10 point) b) Gør rede for, at residualerne med god tilnærmelse kan siges at være normalfordelte, og bestem et 95%-konfidensinterval for hældningskoefficienten i modellen.

Opgave 14

Tabellen viser sandsynlighedsfeltet for en stokastisk variabel X, der angiver en spillers fortjeneste (målt i kr.) i et bestemt spil.

Grafik: www.colourbox.dk

Det oplyses, at a er et positivt tal.

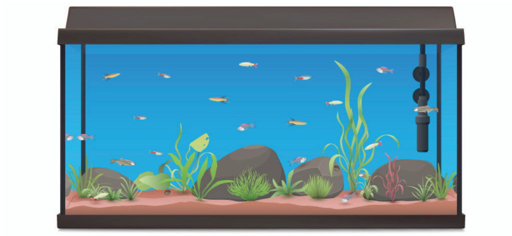
Fortjeneste (kr.)	-10	a	a^2
Sandsynlighed	0,70	0,20	0,10

Middelværdien for X angiver gennemsnittet for en spillers fortjeneste.

(10 point) a) Bestem gennemsnittet for en spillers fortjeneste, når $a = 5$.

(5 point) b) Bestem de værdier af a, som gør, at en spiller i gennemsnit vinder penge på at spille.

Opgave 15



Grafik: www.colourbox.dk

I et akvarium kan temperaturen under opvarmning som funktion af tiden beskrives ved differentialligningsmodellen

$$\frac{dT}{dx} = 1{,}54 - 0{,}259 \cdot (T - 22),$$

hvor $T(x)$ betegner temperaturen (målt i °C) i akvariet til tidspunktet x (målt i timer efter påbegyndt opvarmning). Det oplyses, at temperaturen i akvariet er 22°C, når opvarmningen starter.

(10 point) a) Bestem temperaturens væksthastighed, når temperaturen i akvariet er 26°C.

Akvariets ejer har købt en sart akvariefisk, der ikke tåler temperaturer under 27°C.

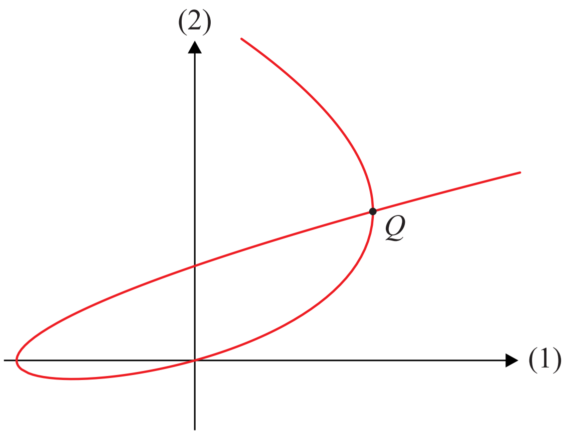
(10 point) b) Benyt modellen til at bestemme, hvor lang tid der går, fra opvarmningen er påbegyndt, til det er sikkert at slippe fisken ned i akvariet.

Opgave 16

En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 12t \\ t^2 - 2t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

På banekurven for $\vec{r}$ er punktet Q et dobbeltpunkt hørende til t-værdierne $t = -2$ og $t = t_0$.



(10 point) a) Bestem koordinatsættet til punktet Q, og bestem t_0.

(10 point) b) Bestem den spidse vinkel mellem banekurvens to tangenter i punktet Q.

Opgave 17 På et bestemt gymnasium sælges to slags sodavand A og B. På gymnasiet gennemføres jævnligt spørgerunder blandt de elever, der drikker sodavand, om de vælger A eller B. Det antages, at 10 % af eleverne skifter fra A til B, og 22 % skifter fra B til A fra spørgerunde til spørgerunde.
Antallet af elever, der drikker henholdsvis sodavand A og sodavand B i spørgerunde n, betegnes henholdsvis a_n og b_n.

(10 point) a) Gør rede for, at udviklingen i fordelingen mellem antal elever, der drikker sodavand A og sodavand B, kan beskrives ved

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}22 \\ 0{,}1 & 0{,}78 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} .$$

(5 point) b) Bestem en egenvektor for $\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}22 \\ 0{,}1 & 0{,}78 \end{pmatrix}$, når egenværdien er 1, og forklar, hvad egenvektoren fortæller om forholdet mellem antallet af elever, der vælger sodavand A henholdsvis B.

Opgave 18 En funktion f af to variable er bestemt ved

$$f(x,y) = x^3 - 3x \cdot y + y^3 .$$

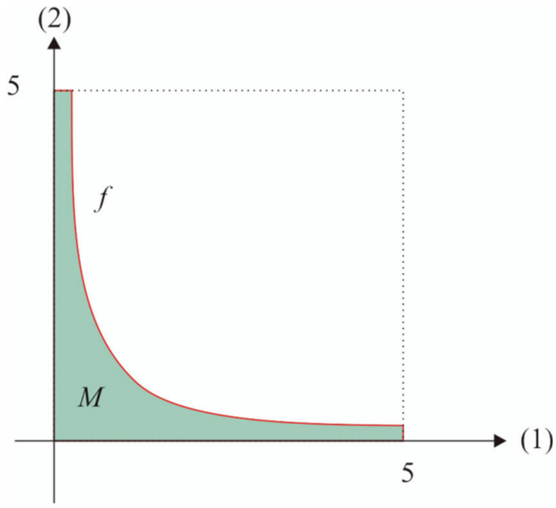
(5 point) a) Bestem $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Det oplyses, at grafen for f har netop to stationære punkter.

(10 point) b) Bestem arten af hvert af de to stationære punkter.

Opgave 19 En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{x} .$$



Et kvadrat med siden 5 er indlagt i et koordinatsystem (se figur). Kvadratet deles i to punktmængder af grafen for f. Den skraverede punktmængde kaldes M (se figur).

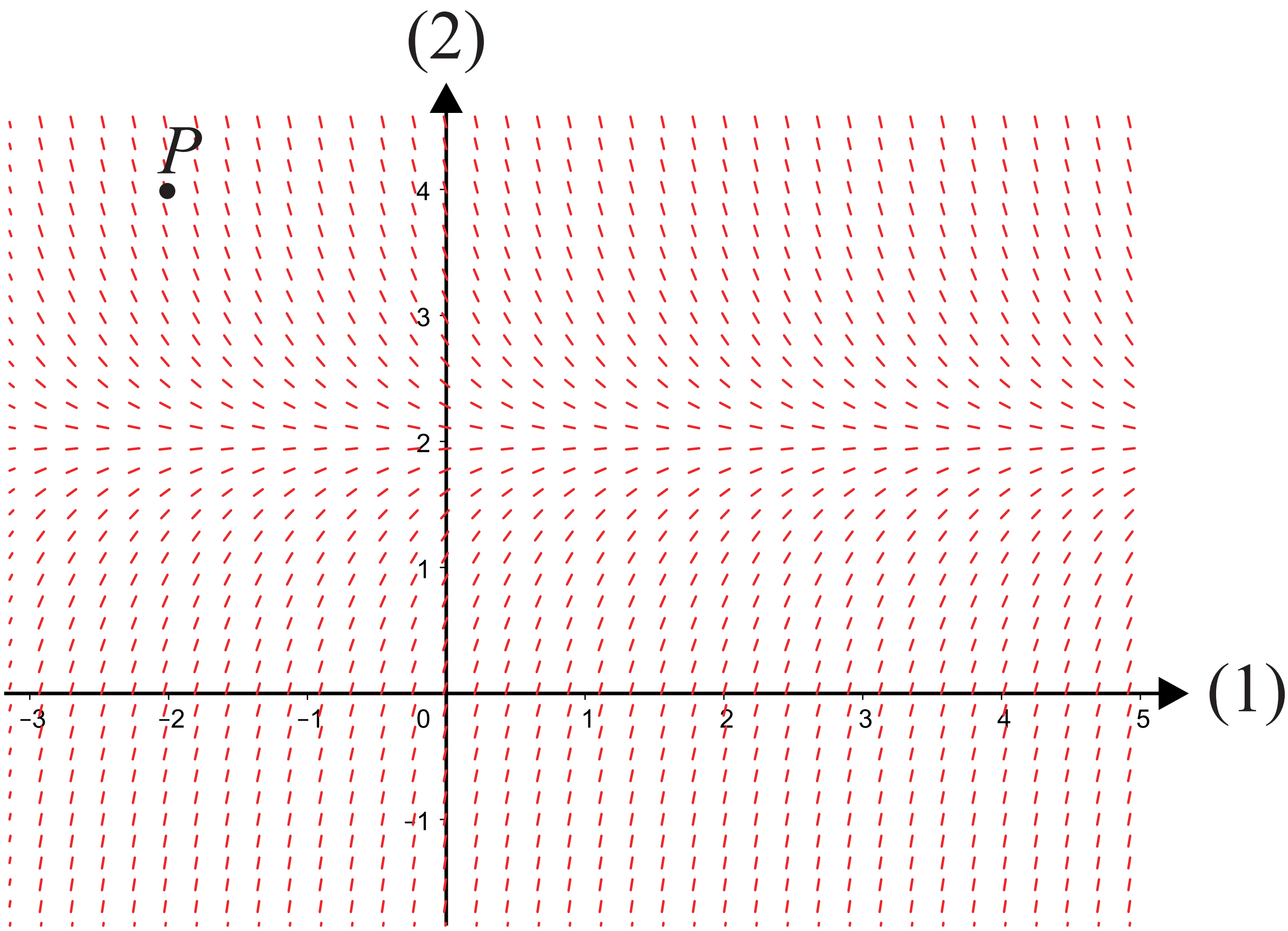
(10 point) a) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes $360°$ om førsteaksen.

BILAG

Bilaget kan indgå i besvarelsen.

Skole	Hold		ID
Navn	Ark nr	Antal ark i alt	Tilsynsførende

Bilag til opgave 5

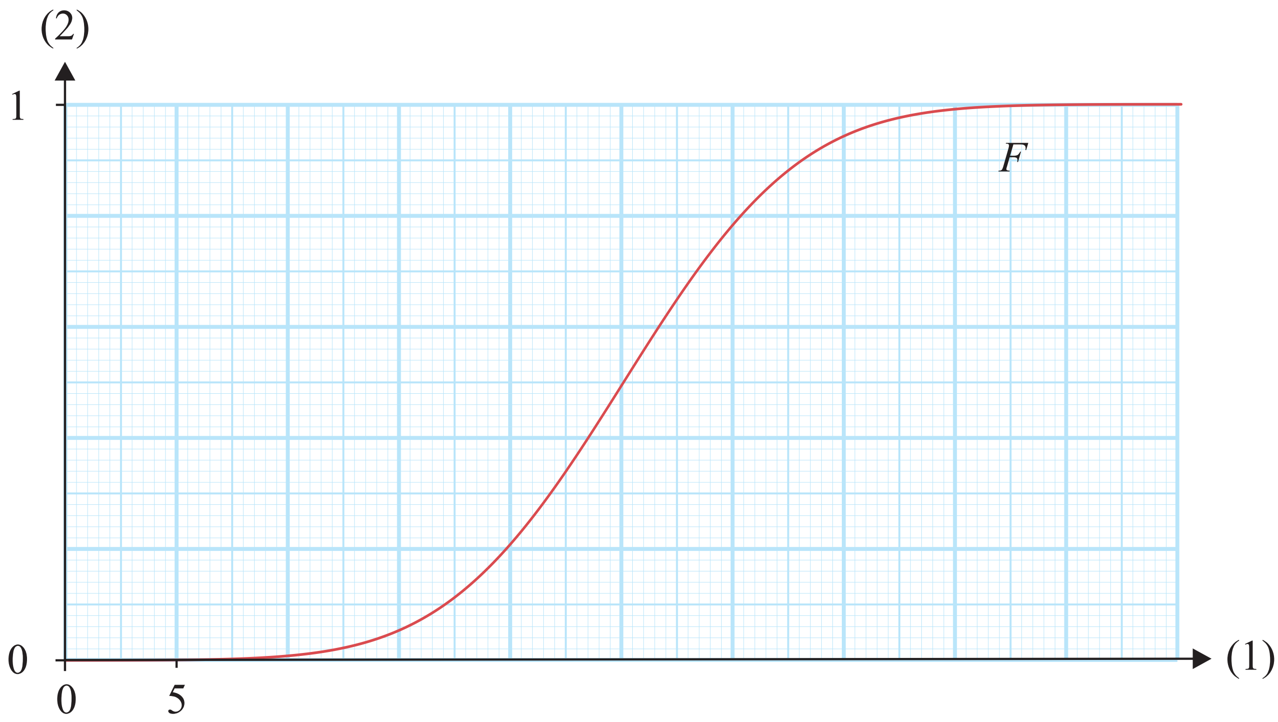


BILAG

Bilaget kan indgå i besvarelsen.

Skole		Hold	ID
Navn	Ark nr	Antal ark i alt	Tilsynsførende

Bilag til opgave 6



Bilag: Indstiksark til formelsamling

Matricer i to dimensioner

Enhedsmatrix	(f1)	$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
Multiplikation mellem matricer	(f2)	$M\cdot N=\begin{pmatrix}a_1 & c_1\\ b_1 & d_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_2 & c_2\\ b_2 & d_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\cdot a_2+c_1\cdot b_2 & a_1\cdot c_2+c_1\cdot d_2\\ b_1\cdot a_2+d_1\cdot b_2 & b_1\cdot c_2+d_1\cdot d_2\end{pmatrix}$
Multiplikation mellem matrix og vektor	(f3)	$M\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cdot x+c\cdot y\\ b\cdot x+d\cdot y\end{pmatrix}$
Multiplikation mellem matrix og skalar	(f4)	$k\cdot M=k\cdot\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\cdot a & k\cdot c\\ k\cdot b & k\cdot d\end{pmatrix}$
Determinant af matrix	(f5)	$M=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix},\quad \det(M)=a\cdot d-b\cdot c$
Invers matrix	(f6)	$M=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix},\quad \det(M)\neq 0$ $M^{-1}=\dfrac{1}{\det(M)}\cdot\begin{pmatrix}d & -c\\ -b & a\end{pmatrix}$
Egenvektor og egenværdi	(f7)	$M\cdot\vec{v}=\lambda\cdot\vec{v}$ $\det(M-\lambda\cdot E)=0$