# Hvorfor kan alle satellitter slippe væk fra jordens tyngdefelt, hvis deres fart forøges med 41 %?

*Hvorfor sendes satellitter op i baner med den samme retning som jorden roterer om sin akse. En satellit tæt på jorden har en stor fart, og en satellit langt fra jorden har en lille fart. Der skal tilføres energi til en satellit for at forøge radius i dens cirkulære bane. Hvordan kan satellitten ende i en bane med mindre fart, selvom den får tilført energi? Uanset hvilken bane en satellit har, skal dens fart forøges med den samme procent, for at slippe fri fra Jordens tyngdefelt.*

Kernestoffet er:

* *gravitationsloven og bevægelse om et centrallegeme*
* *mekanisk energi i gravitationsfeltet om et centrallegeme*

Opslaget indeholder

1. Hvor meget energi skal der tilføres for at få en satellit op i sin bane?
2. Hvordan afhænger satellitters fart af afstanden til jordoverfladen?
3. Hvorfor kan alle satellitter slippe fri for jordens gravitationsfelt, hvis farten forøges med 41 %?
4. I hvilken retning opsendes satellitter, og hvordan ændres satellitters energi?

## 1. Hvorfor opsendes satellitter med den samme rotationsretning som jorden?

**Teoretisk model**

Teori bruges på en forenkling af virkeligheden

*Forenklinger*

* Der ses bort fra jordens atmosfære i de lave satellitbaner (ingen friktion)
* Satellitter bevæger sig i cirkelbaner om jordens centrum
* Satellitten er kun påvirket af jordens gravitationsfelt

*Teori.*

Teori om gravitationskraft, centripetalkraft, bindingsenergi og kinetisk energi

**Satellittens kinetiske energi i banen**

En satellit med massen *m* i en cirkelbevægelse med afstanden *r* til jordens centrum, skal være påvirket af en indadrettet kraft (centripetalkraft) for at blive i banen

$$F\_{cen}=m∙\frac{v^{2}}{r} $$

hvor *v* er satellittens fart i banebevægelsen. Denne centripetalkraft kommer fra tyngdekraften

$$m∙\frac{v^{2}}{r}=G∙\frac{m∙M}{r^{2}}$$

$$\frac{1}{2}∙m∙v^{2}=\frac{1}{2}∙\frac{G∙m∙M}{r}$$

hvor $M$ er jordens masse og *G* er gravitationskonstanten (Newtons store *G*).

$$E\_{kin}=-\frac{1}{2}∙E\_{pot}$$

ved at benytte den potentielle energi i tyngdefeltet nedenfor

**Satellittens potentielle energi i banen**

$$E\_{pot}=-G∙\frac{m∙M}{r} $$

når nulpunktet for den potentielle energi er uendeligt langt fra jorden

**Satellittens totale energi i banen**

$$E\_{mek}=E\_{kin}+E\_{pot}$$

$$ =\frac{1}{2}∙\frac{G∙m∙M}{r}-G∙\frac{m∙M}{r}$$

$$ =-\frac{G∙m∙M}{2∙r}$$

$$ =-\frac{m∙g∙R^{2}}{2∙r}$$

Hvor *g* er tyngdeaccelerationen på jordoverfladen (jordens lille g) og *R* er jordens radius. Bindingsenergien $E\_{bin}=-E\_{mek} $er den energi, der skal tilføres for at få satellitten fri af jordens tyngdefelt.

**Opgave 1.** *Jordens lille g og Newtons store G*

Vis sammenhængen mellem jordens lille *g* og Newtons store *G*

$$G∙M=g∙R^{2}$$

**Energitilførsel for at bringe satellitten op i en højere bane**

Når en satellit med afstanden $r\_{indre}$ til jordens centrum skal ’løftes’ op i en bane med afstanden $r\_{ydre}$ til jordens centrum, skal der tilføres energi

$$E\_{tilført}=E\_{mek}\left(r\_{ydre}\right)-E\_{mek}\left(r\_{indre}\right)$$

$$ =-G∙\frac{m∙M}{2∙r\_{ydre}}-\left(-G∙\frac{m∙M}{2∙r\_{indre}}\right)$$

$$ =G∙m∙M\left(\frac{1}{2∙r\_{indre}}-\frac{1}{2∙r\_{ydre}}\right)$$

$$ =\frac{m∙g∙R^{2}}{2}\left(\frac{1}{r\_{indre}}-\frac{1}{r\_{ydre}}\right)$$

**Opgave 2***. Baneskift til en større bane*

1. Den internationale rumstation (ISS) med massen 300 ton skal forøge sin afstand fra 350 km til 360 km over jordens overflade. Hvor meget energi skal der tilføres?
2. Hvor meget energi kræves der for at løfte en satellit fra en LEO- bane til GPS- banen, fra 1 jordradius til 4 jordradier, når en GPS-satellit har massen 1 ton ?

## 2. Hvordan afhænger satellitters fart af afstande til jorden?

**Satellittens fart i banen**

En satellit i en cirkelbevægelse skal være påvirket af en indadrettet kraft (centripetalkraft) for at blive i banen, og ikke ryge ud af tangenten

$$F\_{cen}=m∙\frac{v^{2}}{r}$$

Denne centripetalkraft kommer fra tyngdekraften

$$m∙\frac{v^{2}}{r}=G∙\frac{m∙M}{r^{2}}$$

heraf fås

$$v\_{bane}= \sqrt{\frac{G∙M}{r}}$$

$$ = \sqrt{\frac{g∙R^{2}}{r}}$$

$$ ≈ \sqrt{g∙R} for en bane meget tæt på jordoverfladen$$

farten i banen kan kaldes *Go Around Velocity.*

**Opgave 3**

Den internationale rumstation (ISS) bevæger sig i en bane i højden $400 km$ over jordoverfladen. Vis at dens fart er ca. 8 km/s, ved at indsætte $g=10 m/s^{2}$.

**Formel for satellittens fart.**

Satellitters fart $v\_{satellit}$ kan beregnes ud fra satellittens afstand stil jordens centrum $r$ via formlen

$$v\_{bane}= \sqrt{\frac{g∙R^{2}}{r}}=\sqrt{g∙R}∙\sqrt{\frac{R}{r}} =8\frac{km}{s}∙\sqrt{\frac{R}{r}}$$

hvor $R$ er jordens radius. Farten på 8 km/s svarer til en banebevægelse helt tæt på jordoverfladen, ligesom ISS.

**Opgave 4**

1. Vis, at farten af en GPS-satellit er 8 gange mindre end farten af ISS, fordi dens afstand til jordens centrum er 4 jordradier.
2. Vis, at månens fart er 8 gange mindre end farten af ISS, når afstanden til jordens centrum sættes til 64 jordradier.

## 3. Hvorfor skal alle satellitter have farten forøget med 41 % for at slippe fri af jordens tyngdefelt?

Hvis den kinetiske energi i banebevægelsen fordobles, er satellitten fri af tyngdefeltet.

$$E\_{mek}=2∙E\_{kin}+E\_{pot}=0$$

$$ =2∙\frac{G∙m∙M}{2∙r}-\frac{G∙m∙M}{r}=0$$

og for at fordoble den kinetiske energi, skal farten forøges med $\sqrt{2}$. Nedenfor fås $v\_{esc}=\sqrt{2}∙v\_{bane}$ ved at sammenligne undvigelsesfarten med farten i banebevægelsen.

$$\frac{1}{2}∙m∙v\_{esc}^{2}=\frac{G∙m∙M}{r}$$

$$ v\_{esc}= \sqrt{\frac{2∙G∙M}{r}}$$

$$ =\sqrt{2}∙\sqrt{\frac{G∙M}{r}}$$

$$ =\sqrt{2}∙v\_{bane}$$

Da $\sqrt{2}≈1,41 $skal satellitten have forøget sin banehastighed med 41 % for at slippe fri. Det er sammenhængen mellem en satellits undvigelsesfart (*Go Away Velocity* ) og farten i banebevægelsen (*Go Around Velocity*). *Når satellitten er i sin bane, har den halvdelen af den kinetiske energi, der kan få den fri af tyngdefeltet.*

**Opgave 5** ISS har en fart på ca. 8 km/s og månen har farten 1 km/s i deres baner rundt om jorden.Hvor meget skal farten forøges til for at slippe fri fra jordens tiltrækning?

## 4. I hvilken retning opsendes satellitter, og hvordan ændres satellitters energi?

**Hvorfor kan en bold med farten 8 km/s gå i kredsløb omkring jorden?**

Hvis en bold skal i et cirkulært kredsløb meget tæt på jordoverfladen, skal den følge jordens krumning. Jordens krumning svarer til, at man bevæger sig 5 m ned mod jordens centrum, for hver gang man har bevæget sig 8 km ud langs tangenten. De 5 m ned svarer til et frit fald på 1 sekund, så hvis boldens fart langs tangenten er 8 km/s, vil den følge jordens krumning og dermed være i kredsløb rundt om jorden. *Bolden falder ikke ned mod jorden, men rundt om jorden.*



**Hvorfor opsendes satellitter så de bevæger sig i samme retning som jordens rotation?**

Her starter satellitten med potentiel energi og slutter i en bane med både potentiel og kinetisk energi. På jordens ækvator har en satellit før afsendelse farten 463 m/s på grund af jordens rotation. Satellittens kinetiske energi formindsker bindingsenergien ganske lidt. Dette lille bidrag er dog årsagen til, at satellitter opsendes tæt på ækvator, og placeres i en bane med samme rotationsretning som jorden.

**Hvordan ændres satellittens energi?**

*Hvordan får satellitten tilført mere energi?*

En satellit kan få tilført energi ved at raketmotoren accelererer satellitten langs tangenten i den cirkulære bane. Den kan også få tilført energi ved at sende raketmotorens udstødning ind mod jordens centrum langs radius i den cirkulære bane. Hvis raketmotorerne er tændt i lige lang tid, ender satellitten i begge tilfælde i den samme bane

*Hvordan mindskes satellittens energi?*

En satellit kan få mindsket sin energi ved at raketmotoren bremser satellitten langs tangenten i den cirkulære bane. Den kan også få mindsket sin energi ved at sende raketmotorens udstødning væk fra jordens centrum langs radius i den cirkulære bane. Hvis raketmotorerne er tændt i lige lang tid, ender satellitten i begge tilfælde i den samme bane

**Hvorfor ender en satellit i en bane med mindre fart, når den tilføres energi?**

Når en satellit kredser om jorden i sin bane, så er det fordi tyngdekraften hindrer satellitten i at ryge ud ad tangenten.

*Satellit tilføres energi.* Når raketmotoren tændes i en satellit, så satellitten får forøget sin fart, kan tyngdekraften ikke længere holde satellitten i den samme bane. Når satellitten bevæger sig væk fra jorden, bremser jordens tiltrækning satellittens fart, så den ender i en bane længere væk fra jorden, men med en mindre fart. Satellitten mister kinetisk energi, men vinder mere potentiel energi i tyngdefeltet, så den ender i en bane, hvor summen af kinetisk og potentiel energi er større.

*Satellit mister energi.* ISS bremset af gnidning fra små partikler i rummet. Den mister fart og tyngdekraften hiver den tættere mod jorden. Når en satellit bremses, ender den i en bane tættere på jorden, men med en større fart. Satellitten mister mere potentiel energi, end den vinder i kinetiske energi, så den ender i en bane, hvor summen af kinetisk og potentiel energi er mindre. Hvis du vil vide mere, så søg på: *Change of satellites orbit*.

**Fart, afstand og omløbstid af satellitter** *LEO, MEO* og *GEO*

*LEO* (Low Earth Orbit). Den internationale rumstation (ISS) bevæger sig med 8 km/s i en bane lidt over 1 jordradius fra jordens centrum og med en omløbstid på 1,5 timer

*MEO* (Medium Earth Orbit). En GPS satellit bevæger sig med 4 km/s i afstanden 4 jordradier fra jordens centrum g med en omløbstid på ca. 12 timer (11 timer og 58 minutter)

*GEO* (Geostationary Earth orbit). De geostationære satellitters bevæger sig med 3 km/s i afstanden 6,5 jordradier fra jordens centrum og med en omløbstid på ca. 24 timer (23 timer og 56 minutter)

**Opsendelse af satellitter**

Opsendelse af en satellit kræver er 2 trins raket. Det første trin forøger den potentielle energi ved at løfte satellitten op til dens bane. Det næste trin giver satellitten kinetisk energi, så den får fart nok til at blive i denne bane.

**Satellitbaner**

* Hvis satellittens fart er er større end farten i den cirkulære bane, men mindre end undvigelsesfarten, så bevæger satellitten sig i en elliptisk bane.
* Hvis satellittens fart er lig med undvigelsesfarten, så bevæger satellitten sig i en parabolsk bane.
* Hvis satellittens fart er større end undvigelsesfarten, så bevæger satellitten sig i en hyperbolsk bane.

I Apollo måneprogrammet blev rumskibet ført placeret i en cirkulær bane om jorden, derefter blev rumskibet sendt i en elliptisk bane mod månen, for at slutte rejsen i en cirkulær bane om månen. Det var fra denne bane, *The Lunar Lander* blev sendt ned på månens overflade.

**Hvorfor fjerner Månen sig fra Jorden?**

Månen fjerner sig med 4 cm om året og jordens rotation aftager med 2 millisekunder på 100 år. Jo længere kommer månen væk, Jo langsommere roterer jorden. I fortiden har døgnet altså været længere og månen tættere på med kortere omløbstid.

Jorden overfører rotationsenergi til månen og den forøgede energi for løftet månen til en bane længere væk fra jorden, men med en mindre fart. *’Månen falder udad’*, fordi den får tilført energi og ’*satellitter falder nedad’,* fordi de mister energi*.*

Internet kilder

<https://da.wikipedia.org/wiki/Undvigelseshastighed>

<https://en.wikipedia.org/wiki/Escape_velocity>

<https://ciet.nic.in/moocspdf/Physics01/Unit06/keph_10804-eContent%202019.pdf>

<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/vesc.html>

<https://docs.wixstatic.com/ugd/a701d0_053e0255f96a4f6290b89db2d8d0b3b3.pdf?index=true>