Opgaver i differentialregning

- uden hjælpemidler

I det følgende skal du udregne en række differentialkvotienter og andre opgaver i tilknytning hertil. Først de regler, vi må benytte:

Nr.	Navn	Regneregler i differentialregning
(131)	Konstantregel	$\left(k \cdot f\right)'(x) \;=\; k \cdot f'(x)$
(132)	Sumregel	$(f+g)'(x) \;=\; f'(x)+g'(x)$
(133)	Differensregel	$(f-g)'(x) \;=\; f'(x)-g'(x)$
(134)	Produktregel	$\left(f \cdot g\right)'(x) \;=\; f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
	Kvotientregel	$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) \;=\; \dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
(136)	Differentiation af sammensat funktion	$\left(f(g(x))\right)' \;=\; f'(g(x))\cdot g'(x)$

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$
(137)	$a\cdot x+b$	a
(138)	k	0
(139)	$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}=x^{-1}$
(140)	e^x	e^x
(141)	$\mathrm{e}^{k\cdot x}$	$k\cdot \mathrm{e}^{k\cdot x}$
(142)	a^x	$\ln(a)\cdot a^x$

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$
(143)	x^a	$a\cdot x^{a-1}$
(144)	$\dfrac{1}{x}=x^{-1}$	$-\dfrac{1}{x^2}=-x^{-2}$
(145)	$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$
(146)	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
(147)	$\sin(x)$	$\cos(x)$
	$\tan(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$

Eksempel 1

Differentier følgende funktion: $f(x)=x^4-3x^2+5x-3$.

Løsning: Der er tale om et polynomium, så vi skal hovedsagelig benytte (143) foruden reglerne (131), (132) og (133).

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^4-3x^2+5x-3\right)' = \left(x^4\right)'-3\cdot\left(x^2\right)'+\left(5x-3\right)' \\ &= 4\cdot x^{4-1}-3\cdot 2\cdot x^{2-1}+5 = 4x^3-6x+5 \end{aligned}$$

For at differentiere det sidste, lineære led, kan evt. bruges (137). I praksis kan man sige, at man differentierer et *polynomium* ved at for hvert led at "gange eksponenten ned foran og trække 1 fra i eksponenten". Konstanter differentierer dog til 0.

□

Eksempel 2

Differentier følgende funktion: $f(x)=x^4\cdot e^x$.

Løsning: Vi skal bruge produktreglen (134).

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^4\cdot e^x\right)' = \left(x^4\right)'\cdot e^x+x^4\cdot\left(e^x\right)' \\ &= 4x^3\cdot e^x+x^4\cdot e^x \\ &= (x^4+4x^3)\cdot e^x \end{aligned}$$

Produktreglen siger lidt underforstået, at man differentierer et produkt af to funktioner ved at differentiere første funktion og lade den anden funktion stå og derefter lade den første funktion stå og differentiere den anden funktion. Den første funktion er et polynomium, den anden funktion den naturlige eksponentialfunktion. Man kan i princippet godt stoppe efter anden linje. I tredje linje er det dog en smule smukkere, da eksponentialfunktionen er sat uden for parentes (faktorisering).

□

Eksempel 3

Differentier følgende funktion: $f(x)=5\cdot\sin(x)+x^{-2}$.

Løsning: Vi benytter konstantreglen (131) og sumreglen (132):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(5\cdot\sin(x)+x^{-2}\right)' = 5\cdot\left(\sin(x)\right)'+\left(x^{-2}\right)' \\ &= 5\cdot\cos(x)+(-2)\cdot x^{-2-1} = 5\cdot\cos(x)-2\cdot x^{-3} \end{aligned}$$

Hvor vi i tredje trin har brugt henholdsvis (147) og (143).

□

Eksempel 4

Differentier følgende funktion: $f(x) = \cos(x^3 - x)$.

Løsning: Vi ser, at der er tale om at differentiere en *sammensat funktion*, så vi skal bruge regel (136):

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(x^3 - x) \cdot \left(x^3 - x\right)' \\ &= -\sin(x^3 - x) \cdot (3x^2 - 1) \\ &= -(3x^2 - 1) \cdot \sin(x^3 - x) \end{aligned}$$

Ydre: $\cos(y)$	$\left(\cos(y)\right)' = -\sin(y)$
Indre: $x^3 - x$	$\left(x^3 - x\right)' = 3x^2 - 1$

Reglen kan sprogligt udtrykkes noget i retningen af følgende: "Man differentierer en sammensat funktion ved at differentiere den ydre funktion, sætte den indre funktion ind og gange med den indre funktion differentieret": Som boksen viser er den ydre funktion her $\cos(y)$, og den indre funktion er $x^3 - x$. De differentierede funktioner er også anført. NB! I tredje linje er parentesen $(3x^2 - 1)$ blot skrevet foran sinus for en god ordens skyld!

$$\left(f(g(x))\right)' = \overbrace{f'(g(x))}^{\text{ydre funktion differentieret med indre funktion indsat}} \cdot \overbrace{g'(x)}^{\text{ìndre funktion differentieret}}$$

Eksempel 5

Givet $f(x) = 2x^2$. Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P_0(3, f(3))$.

Løsning: Som bekendt kan en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P_0(x_0, f(x_0))$ fås ved hjælp af følgende formel: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

Vi har umiddelbart $f'(x) = 4x$, og da $x_0 = 3$ fås $f(3) = 2 \cdot 3^2 = 18$ og $f'(3) = 4 \cdot 3 = 12$. Det giver indsat i tangentens ligning følgende:

$$y = f'(3) \cdot (x - 3) + f(3) = 12 \cdot (x - 3) + 18 = 12x - 36 + 18 = 12x - 18$$

Dermed fås følgende ligning for tangenten til grafen for f i punktet P_0: $y = 12x - 18$.

□

Opgaver

Opgave 1

Bestem differentialkvotienten til nedenstående funktioner manuelt.

a) $f(x)=3x^2$ c) $f(x)=x^5+4x^2-5x+7$ b) $f(x)=\frac{1}{2}x^6-4x^3+7x-2$

d) $f(x)=e^{2x}+x^{-2}$ e) $f(x)=\dfrac{5}{x}$ f) $f(x)=3^x$

Opgave 2

Differentier manuelt følgende funktioner ved brug af produktreglen for differentiation:

a) $f(x)=7x\cdot\sin(x)$ b) $f(x)=x^2\cdot e^{3x}$ c) $f(x)=2x\cdot e^{-x}$

Opgave 3

Differentier nedenstående sammensatte funktioner.

a) $f(x)=\sin(2x^4-2x)$ b) $f(x)=(5x-2)^6$ c) $f(x)=\dfrac{1}{6x+9}$

d) $f(x)=e^{7x^2+x-5}$ e) $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$

Opgave 4

I hver af nedenstående opgaver er angivet en funktion og et punkt. Bestem for hvert tilfælde en ligning for tangenten til grafen for funktionen i det angivne punkt.

a) $f(x)=x^2-4x$. Punkt: $P_0(1,f(1))$.

b) $f(x)=\sqrt{x}$. Punkt: $P_0(4,f(4))$.

c) $f(x)=x^3-2x^2+6$. Punkt: $P_0(2,f(2))$.

d) $f(x)=x+e^{2x}$. Punkt: $P_0(0,f(0))$.

Opgave 5

Bestem differentialkvotienten til nedenstående blandede funktioner.

a) $f(x)=x^4+x^{-4}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{\sin(x)}$ c) $f(x)=2x^3\cdot\sin(x)$

d) $f(x)=e^{-x^3+4x}$ e) $f(x)=3x^{-3}+3x$

Løsninger

Opgave 1: a) $6x$ b) $5x^4+8x-5$ c) $3x^5-12x^2+7$

d) $2e^{2x}-2x^{-3}$ e) $-\dfrac{5}{x^2}$ f) $\ln(3)\cdot 3^x$

Opgave 2: a) $7\cdot\sin(x)+7x\cdot\cos(x)$ b) $(2x+3x^2)\cdot e^{3x}$ c) $(2-2x)\cdot e^{-x}$

Opgave 3: a) $(8x^3-2)\cdot\cos(2x^4-2x)$ b) $30\cdot(5x-2)^5$ c) $-\dfrac{6}{(6x+9)^2}$

d) $(14x+1)\cdot e^{7x^2+x-5}$ e) $\dfrac{2x+8}{2\cdot\sqrt{x^2+8x}} = \dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}}$

Opgave 4: a) $y=-2x-1$ b) $y=\frac{1}{4}x+1$ c) $y=4x-2$ d) $y=3x+1$

Opgave 5: a) $4x^3-4x^{-5}$ b) $-\dfrac{\cos(x)}{(\sin(x))^2}$ c) $6x^2\cdot\sin(x)+2x^3\cdot\cos(x)$

d) $(-3x^2+4)\cdot e^{-x^3+4x}$ e) $-9x^{-4}+3$