## Det tredje trin i tretrinsreglen

Sekant og sekanthældning

En **s**ekant **s**kærer grafen i to punkter (sekant kommer af latin *secare ’skære’*) Sekanthældningen beregnes ved brug af to-punkts formlen

$$a\_{s}=\frac{y\_{1}-y\_{0}}{x\_{1}-x\_{0}}=\frac{f\left(x\_{1}\right)-f(x\_{0})}{∆x}=\frac{f\left(x\_{0}+∆x\right)-f(x\_{0})}{∆x}=\frac{f\left(x\_{0}+h\right)-f(x\_{0})}{h}$$

hvor $x\_{1}-x\_{0}=∆x=h$. Sekanthældningen kaldes også differenskvotienten, da det er en brøk (kvotient) mellem differenser.

Tangent og tangenthældning

En tangent rører grafen i et enkelt punkt (tangent kommer af latin ’berøre’), hvilket huskes bedre på engelsk: ”*the* ***t****angent is* ***t****ouching the curve”*). Tangenthældningen (differentialkvotienten), er *defineret* som grænseværdien for sekanthældningerne, hvilket kan skrives som: $a\_{s}\rightarrow a\_{t}, når h\rightarrow 0$. Tangenten er den entydig bestemte linje med hældningen $f'(x\_{0})$, som sekanterne nærmer sig, når $x\rightarrow x\_{0}$. *Tangenten er sekanternes endestation.*

1. Kvadratfunktionen. Når $x\_{0}=1, så går $sekanthældningen mod 2, når *h* går mod 0.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$x$$ | $$x\_{0}=1$$ | $$x\_{0}+h=1+0,1=1,1$$ |
| $$y=f\left(x\right)=x^{2}$$ | $$f(x\_{0})=1$$ | $$f\left(x\_{0}+h\right)=1,1^{2}=1,21$$ |

$$a\_{s}=\frac{f\left(x\_{0}+h\right)-f(x\_{0})}{h}=\frac{1,21-1}{0,1}=\frac{0,21}{0,1}=2,1$$

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$x$$ | $$x\_{0}=1$$ | $$x\_{0}+h=1,01$$ |
| $$y=f\left(x\right)=x^{2}$$ | $$f(x\_{0)}=1$$ | $$f\left(x\_{0}+h\right)=1,01^{2}=1,0201$$ |

$$a\_{s}=\frac{f\left(x\_{0}+h\right)-f(x\_{0}}{h}=\frac{1,0201-1}{0,01}=\frac{0,0201}{0,01}=2,01$$

*Læg mærke til at tæller og nævner skrumper i takt, så brøken går mod et fast tal*

De samme sekanthældninger fås også ved at indsætte i formlen for sekanthældningen

$$a\_{s}=2x\_{0}+h$$

Indsættes $x\_{0}=1$ og $h=0,1$

$$a\_{s}=2∙1+0,1=2,1 $$

2. Kvadratrodsfunktionen. Når $x\_{0}=1, så går $sekanthældningen mod ½, når *h* går mod 0.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$x$$ | $$x\_{0}=1$$ | $$x\_{0}+h=1+0,21=1,21$$ |
| $$y=f\left(x\right)=\sqrt{x}$$ | $$f(x\_{0)}=1$$ | $$f\left(x\_{0}+h\right)=\sqrt{1,21}=1,1$$ |

$$a\_{s}=\frac{f\left(x\_{0}+h\right)-f(x\_{0})}{h}=\frac{1,1-1}{0,21}=\frac{0,1}{0,21}=\frac{1}{2,1}$$

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$x$$ | $$x\_{0}=1$$ | $$x\_{0}+h=1,0201$$ |
| $$y=f\left(x\right)=\sqrt{x}$$ | $$f(x\_{0)}=1$$ | $$f\left(x\_{0}+h\right)=\sqrt{1,0201}=1,01$$ |

$$a\_{s}=\frac{f\left(x\_{0}+h\right)-f(x\_{0}}{h}=\frac{1,01-1}{0,0201}=\frac{0,01}{0,0201}=\frac{1}{2,01}$$

*Læg mærke til at tæller og nævner skrumper i takt, så brøken går mod et fast tal*

De samme sekanthældninger fås også ved at indsætte i formlen for sekanthældningen

$$a\_{s}=\frac{1}{\sqrt{x\_{0}+h}+\sqrt{x\_{0}}}$$

Indsættes $x\_{0}=1$ og $h=0,21$

$$a\_{s}=\frac{1}{\sqrt{1+0,21}+\sqrt{1}}=\frac{1}{1,1+1}=\frac{1}{2,1}$$

3. Reciprokfunktionen Når $x\_{0}=1, så går $sekanthældningen mod -1, når *h* går mod 0.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$x$$ | $$x\_{0}=1$$ | $$x\_{0}+h=1,1$$ |
| $$y=f\left(x\right)=\frac{1}{x}$$ | $$f(x\_{0)}=1$$ | $$f\left(x\_{0}+h\right)=\frac{1}{1,1}=0,91$$ |

$$a\_{s}=\frac{f\left(x\_{0}+h\right)-f(x\_{0})}{h}=\frac{0,91-1}{0,1}=\frac{-0,09}{0,1}=-0,9$$

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$x$$ | $$x\_{0}=1$$ | $$x\_{0}+h=1,01$$ |
| $$y=f\left(x\right)=\frac{1}{x}$$ | $$f(x\_{0})=1$$ | $$f(x\_{0}+h)=\frac{1}{1,01}≈0,99$$ |

$$a\_{s}=\frac{f\left(x\_{0}+h\right)-f(x\_{0}}{h}≈\frac{0,99-1}{0,01}≈\frac{-0,01}{0,01}≈-1$$

*Læg mærke til at tæller og nævner skrumper i takt, så brøken går mod at fast tal*

De samme sekanthældninger fås også ved at indsætte i formlen for sekanthældningen

$$a\_{s}=\frac{1}{\left(x\_{0}+h\right)∙x\_{0}}=\frac{1}{x\_{0}^{2}+h}$$

Indsættes $x\_{0}=1$ og $h=0,1$

$$a\_{s}=\frac{1}{\left(1+0,1\right)∙1}=\frac{1}{1,1}=0,91$$

*Tretrinsreglen er en proces, der undersøger om grafen har en tangent, og hvis den har en tangent, så fås tangentens hældning via det tredje trin.*

***h* bliver aldrig lig med nul**

Læg mærke til at *h* går mod nul uden nogensinde at blive nul. Hvis $h=0$ indsættes i sekanthældningen fås, $a\_{s}=\frac{0}{0}⇔0∙a\_{s}=0$, hvor den sidste ligning har uendelig mange løsninger, og derfor er $\frac{0}{0}$ ikke defineret.

**Karakterisering af grafen til en differentiabel funktion**

En differentiabel funktion er *lokalt lineær*, fordi den har en tangent i et hvert punkt, og fordi tangenten er den rette linje, der bedst tilnærmer grafen i et givent punkt.

En kontinuert funktion er *sammenhængende*, dvs. man kan tegne den uden at løfte *pennen fra papiret*.

En differentiabel funktion har en graf uden *huller*, *hop* og *knæk*, og derfor er en differentiabel funktion også kontinuert.

Videoer fra KG MAT, der gennemgår de tre klassiske beviser med differentialkvotient via tretrinsreglen. Alle videoerne er meget korte og kontante



Tretrinsreglen 4.42 min.

<https://www.youtube.com/watch?v=3_gzOiWR0Gk>

Kvadratfunktionen 2.2 min.

<https://www.youtube.com/watch?v=jcsWHD741k8>

Kvadratrodsfunktionen 3.54 min.

<https://www.youtube.com/watch?v=5lULUzkS4QU>

Reciprokfunktionen 3,0 min.

<https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=hpIvg-zd4DA>

Definitioner at tangentlinjen

<https://www2.lawrence.edu/fast/GREGGJ/Math140/031/031Tangents.html>

<https://www.mathsisfun.com/geometry/tangent-secant-lines.html>