# Relativitetsteori 2, relative tid og længde*.*

I opslaget gennemgås

1. Alt er relativt undtaget lystes fart
2. Hvorfor er samtidighed relativ?
3. Lys-uret
4. Tidsforlængelsen
5. Længdeforkortelsen
6. Hvorfor er der ikke en længdeforkortelse på tværs?
7. Udledning af formlen for længdeforkortelsen
8. Hvordan kan myoner nå ned til jordoverfladen?
9. Perspektivering til GPS

*The gamma factor, Fermilab, Don Lincoln, 8 min.*

[*https://www.youtube.com/watch?v=qXxtqK7G4Uw*](https://www.youtube.com/watch?v=qXxtqK7G4Uw)

## 1. Alt er relativt, undtaget lysets fart.

**De to relativitetsteorier**

Teorierne kaldes for den specielle og den generelle relativitetsteori.

* Den specielle fra 1905 der viser, at et ur i bevægelse går langsommere end et ur i hvile.
* Den generelle fra 1915 der viser, at et ur går langsommere i et kraftigt tyngdefelt.

**Antagelserne bag den specielle relativitesteori**

*Den specielle relativitetsteori.*

Teorien bygger på følgende påstande:

1. *Relativitetsprincippet.* *Alle* *fysikkens* love er ens for alle observatører, der bevæger sig med konstant fart i forhold til hinanden.
2. *Lysets fart er absolut****.*** Lysets fart er en konstant uanset lyskildens eller observatørens bevægelse.

*I den specielle relativitetsteori er alt relativt undtaget lysets fart.*

*Uddybning af relativitetsprincippet.*

Det er en udvidelse af relativitetsprincippet i den klassiske fysik, hvor *alle* *mekanikkens* love er ens for alle observatører, der bevæger sig med konstant hastighed i forhold til hinanden. Man kan ikke ved nog*et eksperiment* afgøre om man er i bevægelse eller ej. Al bevægelse er relativ. Man kan lige så godt hævde, at det er perronerne, der passerer toget, som det er toget, der passerer perronerne.

*Uddybning af lysets absolutte fart.*

* At lysets fart ikke er påvirket af kilden, er ikke så underligt, for det gælder også for lyd. Når lyden først har forladt ambulancens sirene, bevæger den sig med lydens fart i luft, uanset ambulancens fart.
* At lysets fart ikke er påvirket af observatørens bevægelser, er underligt, for det gælder ikke andre bølgebevægelser. Bevæger man sig mod en stillestående lyd kilde, er lydens fart større, end hvis man bevæger sig væk fra den.

*I det følgende anvendes den hypotetisk deduktive metode*

Vi tror på de to grundlæggende antagelser (hypoteser) og deducerer konsekvenser ved brug af tankeeksperimenter. Hypoteserne accepteres så længe konsekvenserne er i overensstemmelse med eksperimentelle resultater.

## 2. Hvorfor er samtidighed relativ?

**Tankeeksperiment**

En person i midten af vognen sender laserlys mod togets for - og bagende. Lyset udsendes i det øjeblik, hvor personen på toget er lige ud for en person på perronen.

* *Set fra toget.* Lyset når for- og bagenden på samme tid, fordi lyset set fra toget bevæger sig med lysets fart, og der er lige langt til for- og bagenden.
* *Set fra perronen.* Lyset vil først nå togets bagende, fordi lyset bevæger sig med lysets fart mod en bagende, der nærmer sig lysstrålen og en forende, der fjerner sig fra lysstrålen.

****

*Lysets fart er lysets fart for alle, men samtidighed gælder kun for den enkelte, og kan ikke deles med andre.*

## 5. Relativ samtidighed fører til relativ længde

En person i midten af vognen sender en kraftig lyspuls mod togets for - og bagende. Ved for og bagende er der et spejl, så lyset kan sætte et mærke på skinnerne. Lyset udsendes i det øjeblik, hvor personen på toget er lige ud for en person på perronen.

*Set fra toget*

Lyset når for- og bagenden på samme tid, fordi lyset set fra toget bevæger sig med lysets fart, og der er lige langt til for- og bagenden. Man kan måle togets længde, ved at måle afstanden mellem mærkerne på skinnerne, fordi mærkerne er afsat samtidigt.

*Set fra perronen*

Lyset vil først nå togets bagende, fordi lyset bevæger sig med lysets fart mod en bagende, der nærmer sig og en forende der fjerner sig. En person på perronen, vil påstå, at afstanden mellem mærkerne er større end togets længde, fordi mærket ved bagenden er afsat før mærket ved forenden.

*’Perron-personen’ påstår, at toget er kortere, end ’tog-personen’ måler den til.*

## 3. Lys-uret

**Forskellige slags ure**

Ethvert ur består af en tæller, der kan registrere et fysisk fænomen, der gentager sig med et fast tidsinterval.

*Pendulur*. Et pendul med længden 99,6 cm har en svingningstid på 2 sekund, hvis udsvingene er små, og hvis man sørger for at give pendulet et skub ind i mellem, så det ikke går i stå. Et *tik-tak* varer 2 sekunder og derfor varer et *tik* 1 sekund[[1]](#footnote-1). Derefter skal pendulbevægelsen overføres til rotation af visere.

*Kvartsur.* Her sender et batteri en elektriske puls til en kvartskrystal formet som en lille stemmegaffel, der så vibrerer med en konstant frekvens på 32768 Hz $=10^{15}$ Hz. Et elektrisk kredsløb tæller vibrationerne, og sender hvert sekund en elektriske puls til en motor og videre til et display.

*Atomur*. I et strontium atomur sendes lys fra en laser med bølgelængden 689 nm ind om strontiumatomer der får elektroner til at hoppe frem og tilbage mellem nogle elektronskaller.

*Lys-ur.* Uret består at en lyskilde, et spejl og en detektor. I en lys-ur sendes en lyspuls op til et spejl, der befinder sig fx 15 cm væk og returnerer til detektoren, der derefter sender en ny puls afsted. Tiden mellem afsendelse og modtagelsen af lyspulsen tager 1 nanosekund. Der er aldrig konstrueret et lys-ur, så lys-uret er et tankeeksperiment.

**Opgave 1**

Vis, at lyset bevæger sig 0,30 m på 1 ns

**Lys-uret**

* Set fra toget afsendes og modtages lyset fra det samme sæde i toget. Derfor bevæger lysstrålen sig lige op og ned.
* Set fra perronen afsendes og modtages lyset også fra det samme sæde i toget, men sædet bevæger sig, mens lyset er undervejs. Lyset afsendes derfor ud fra en jernbanesvelle og modtages ud fra en anden svelle. Lyset bevæger sig en skrå og længere rute, og da lysets fart ikke kan ændres, tager det derfor længere tid.

*Uddybning af lysets skrå bevægelse.*

Lyset befinder sig hele tiden på den lodrette linje mellem de to spejle, og begge spejle bevæger sig med den horisontale fart *v,* og det gør lyset derfor også. Jo hurtigere toget kører, jo større bliver lysets horisontale fart, og jo mindre bliver lysets lodrette fart. Man kan også forstille sig at laserlys bevæger sig op og ned i et smalt rør. Set fra toget rammer det ikke rørets sider, og det gør det derfor heller ikke set fra perronen. Derfor må lyset have samme vandrette fart som toget. Hvis det var en bold der blev kastet opad, ville den lodrette fart være uændret, og derfor ville farten i den skrå retning være større. For lyset er farten i den skrå retning uændret, og det er den lodrette fart, der bliver mindre (Morin, 2016, p. 18).

****

*Bemærkning om anvendelse af Pythagoras sætning*

Pythagoras sætning gælder også for fart, fordi den gælder for afstande, og fart er afstand per tid. (Morin, 2016, p 18)

## 4. Tidsforlængelsen.

**Formlen for tidforlængelsen.**

Tiden målt af en person, der er i hvile i forhold til uret, kaldes for *egentiden* (proper time) og skrives som *t*0. *Egentiden* måles ved at starte og stoppe uret, i det samme fysiske punkt. Alle andre vil måle en længere tid *t*.

$$t=\frac{t\_{0}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}}$$

hvor *v* = lys-urets fart i forhold til observatøren og *c* = lysets fart.

* Set fra toget afsendes og modtages lysstrålen i det samme punkt, og tiden mellem afsendelse og modtagelse kaldes $t\_{0}$. *Alle andre måler et længere tidsinterval*.
* Set fra perronen afsendes og modtages lysstrålen i to forskellige punkter, og tiden mellem afsendelse og modtagelse kaldes *t*.

**Opgave 2**

1. Et tog passerer en perron med farten $v=0,6∙c$, hvilket er 60 % af lysets fart. Vis, at tiden for lyset om at nå op og ned tager 1,25 s målt fra perronen, når det tager 1 s målt fra toget.
2. Et tog passerer en perron med farten *v* = $0,8∙c$. Vis, at tiden for lyset om at nå op og ned tager 1,67 s målt fra perronen, når det tager 1 s målt fra toget.

**Gammafaktoren og Pythagoras sætning**

Gammafaktoren er defineret som

$$γ(v)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}}$$

Læg mærke til sammenhængen mellem gammafaktoren og heltallige løsninger til Pythagoras sætning (tripler), hvor der nedenfor er triplerne $(3,4,5)$ og $(5,12,13)$

**Opgave 3**

1. Vis at gammafaktoren er $\frac{5}{4}$, når farten er $\frac{3}{5} c$
2. Vis at gammafaktoren er $\frac{5}{3}$, når farten er $\frac{4}{5} c$
3. Vis at gammafaktoren er $\frac{13}{5}$, når farten er $\frac{12}{13} c$

**Tidsforlængelsen gælder begge veje.**

Passageren på perronen hævder, at et uret på toget går langsomt, og passageren på toget hævder, at uret på perronen går langsomt.

**Tiden målt af en person, der er i hvile i forhold til lysuret**

Kaldes højden af et lys-ur for $L\_{0}$, så vil tiden op og ned målt af en person, der er i hvile i forhold til lysuret

$$t\_{0}=\frac{2∙L\_{0}}{c}$$

fordi lyset skal bevæge sig strækningen $L\_{0}$ op og ned med farten *c*.

**Tiden målt af en person, der ser lysuret køre forbi**

*Metode hvor Pythagoras sætning anvendes på hastigheder.* Tiden målt af en person, der ser det lodrette *lys-ur* passere forbi med farten *v.* Lysets fart i lodret retning, set fra en person på perronen er som vist på figuren $\sqrt{c^{2}-v^{2}}$

 

Jo større fart toget har, jo mindre fart har lyset i lodret retning og jo længere tid varer et ’*tik*-*tak*’ set fra perronen. Da begge personer er enige om højden af lys-uret (længder på tværs af bevægelsesretningen ændrer sig ikke). Tiden op og ned målt fra perronen

$$t=\frac{2∙L\_{0}}{\sqrt{c^{2}-v^{2}}}=\frac{c∙t\_{0}}{\sqrt{c^{2}\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}\right)}} =\frac{c∙t\_{0}}{c∙\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}}=\frac{t\_{0}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}}$$

$$ $$

**Opgave 4**

Argumenter for alle ovenstående lighedstegn

*Tidsforlængelsen gælder også selvom toget er accelereret*

Tidsforlængelsen holder også selvom toget accelererer, det er kun den øjeblikkelige fart, der skal bruges i formlen for tidforlængelse. Det svarer lidt til vindkuldgraden, den afhænger kun af cyklistens fart, og glemmer alt om cyklisten acceleration for at opnå farten (Morin, 2016, p 21).

**Tvillingeparadokset**

Tvilling A bliver på jorden mens tvilling B rejser ud til en fjern stjerne og tilbage igen. Set fra jorden går B’s ur for langsomt og set fra B går A’s ur for langsomt. De påstår begge, at den anden er yngre. Denne symmetri brydes af den acceleration B er udsat for i U-vendingen rundt om stjernen. Ifølge den generelle relativitetsteori vil A se tiden går mere langsomt under accelerationen. Paradokset kan også løses ved kun at anvende den specielle relativitetsteori.

## 5. Længdeforkortelsen

**Formlen for længdeforkortelsen**

Længden målt af en person, der er i hvile i forhold til genstanden kaldes *hvilelængden eller egenlængden* (proper length) og skrives *L*0. *Hvilelængden* kan måles ved at lægge målestokke ud. Alle andre måler en kortere længde *L.*

$$L=L\_{0 }∙\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}$$

**Opgave 5**

En person der er i hvile i forhold til toget, har målt længden til 20 m.

1. Hvor langt er toget målt fra perronen, når togets fart er 0,6 c?
2. Hvor langt er toget målt fra perronen, når togets fart er 0,8 c?

## 6. Hvorfor er der ikke en længdeændring på tværs af bevægelsesretningen?

**Eksempel 1.** *Konsekvenser af en længdeændring på tværs af bevægelsesretningen.*

* *Set fra perronen.* Hvis der er en længdeformindskelse på tværs, så vil en person på jorden hævde, at afstanden mellem toghjulene er skrumpet og toget afspores, fordi hjulene rammer indenfor skinnerne.
* *Set fra toget.* Hvis der er en længdeformindskelse på tværs, så vil en person på toget hævde, at afstanden mellem skinnerne er skrumpet og toget afspores, fordi hjulene rammer udenfor skinnerne.

Set fra toget, er det skinnerne, der bevæger sig mod toget og set fra skinnerne, er det toget der bevæger sig på skinnerne. Ved at se hvordan toget er afsporet, kunne man finde ud, hvem der bevæger sig, og det ville stride mod relativitetsprincippet.

**Opgave 6**

En kugle sendes gennem kanonens løb med stor fart. Hvorfor vil en længdeforkortelse på tværs resultere i et paradoks?

## 7. Længdeforkortelsen ved brug af et vandret - og et lodret lys-ur

**Tiden for lyspuls at komme frem og tilbage i et vandret lysur**

Tiden for en lyspuls at bevæge sig frem og tilbage i et vandret *lys-ur*, set fra lys-uret

$$t\_{0}=\frac{2∙L\_{0}}{c}$$

hvor$t\_{0}$er *egentiden,* fordi lyspulsen afstandes og modtages i det samme fysiske punkt. Tiden det tager for en lyspuls at bevæge sig frem og tilbage i et vandret *lys-ur*, set udefra

$$t\_{frem}=\frac{L}{c-v} og t\_{tilbage}=\frac{L}{c+v}$$

Det er legalt bare at lægge farten *v* til og trække dem fra, fordi det er den relative fart mellem lys og tog, set fra perronen. (Morin, 2016, p. 23). Tiden frem og tilbage kan derfor skrives

$$t=\frac{L}{c-v}+\frac{L}{c+v}=\frac{L(c+v)}{c^{2}-v^{2}}+\frac{L(c-v)}{c^{2}-v^{2}}=\frac{2Lc}{c^{2}-v^{2}} =\frac{\frac{2L}{c}}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}$$

**Opgave 7**

Redegør for alle ovenstående lighedstegn

**Længdeforkortelsen ved ved brug af tidsforlængelsen samt et lodret - og vandret lys-ur**

Betragt to identiske *lys-ure*, et lodret, og et vandret. De to lys-ure er synkroniseret, set fra en observatør, der er i hvile i forhold til urene. De to lys-ure skal også være synkroniserede, hvis de er i bevægelse, ellers ville man kunne finde ud af hvem der i virkeligheden bevægede sig, hvilket strider mod relativitetsprincippet.



$$t\_{vandret}=t\_{lodret}⇔$$

$$\frac{\frac{2L}{c}}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}=\frac{\frac{2L\_{0}}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}} ⇔ L=L\_{0 }\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}$$

$$ $$

**Opgave 8**

Redegør for biimplikationen $⇔ $ovenfor

**Eksempel 2.** *Tankeeksperiment, hvor lysets fart er 100 km/h.*

Forestil dig en verden, hvor lysets fart er 100 km/h. Et tog kører med farten 80 km/h. Toget skal køre fra København til Korsør, hvilket er en strækning på 100 km.

*Hvem måler egentid og egenlængde?*

Det er perronobservatøren, der måler længden $L\_{0}$, fordi personen er i hvile i forhold til skinnerne. Afstanden fra København til Korsør kunne bestemmes ved at måle afstanden mellem to sveller, gå strækningen, og tælle antallet af sveller. Det er togobservatøren, der måler $t\_{0}$, fordi tiden måles ved at starte og stoppe uret fra det samme sæde i togvognen.

* Set fra en person i København, tager turen 1,25 timer, fordi $80 ^{km}/\_{h}∙1,25 h = 100 km$. Tiden for afgang måles af et ur i København, og tiden for ankomst måles af et ur i Korsør.
* Set fra toget, nærmer Korsør sig med 80 km/h og strækningen er forkortet fra 100 km til 60 km. Set fra toget tager turen kun 0,75 time, fordi $80 {km}/{h}∙0,75 h = 60 km$

**Opgave 9**

Vis, at begge observatører måler togets fart til $80 km/h$

Længdeforkortelse ud fra tidforlængelsen

Set fra togskinnerne

$$v=\frac{L\_{0}}{t}$$

Set fra toget

$$v=\frac{L}{t\_{0}}$$

**Opgave 10**

Vis, at længdeforkortelsen fremkommer ved at indsætte formlen for tidsforlængelsen, ved at isolere *L* i ovenstående ligning og indsætte

$$t\_{0}=t∙\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^{2}}$$

**Tidsforlængelsen og længdeforkortelsen gælder begge veje**

* Passageren på perronen hævder, at uret på toget går langsomt, og passageren på toget hævder, at uret på perronen går langsomt.
* Passageren på perronen hævder, at toget er forkortet,ogpassageren på toget hævder, at perronen er forkortet.

*Hvilken længde har toget i virkeligheden?*

Spørgsmålet giver ikke mening, længden af toget afhænger af det initialsystem toget betragtes fra (Morin 2016 s 25).

*Er længden af toget virkelig kortere set fra perronen?*

Betragt et stykke papir der kan dække billedet af Mona Lisa. Føres papiret langsomt forbi billedet, kan man ikke se Mona Lisa i et kort øjeblik, men føres det hurtigt forbi, vil papiret ikke kunne dække for ansigtet. Jo hurtigere papiret bevæger sig, jo mere af ansigtet kan man se (Morin 2016 s 25).

## 6. Hvordan kan myoner, der dannes i atmosfæren nå ned til jorden, når de lever så kort tid?

Impossible muons, minute physics, 4,3 min.

<https://www.youtube.com/watch?v=rVzDP8SMhPo>

**Eksempel 3.** *At myoner når ned til jordoverfladen er en relativistisk effekt.*

En myon er en tung elektron (200 gange tungere end elektronen), og den henfalder ifølge dens eget ur i løbet af 2 mikrosekunder ($2 μs$) til en elektron og en neutrino. Myoner skabes af den kosmiske stråling i atmosfæren og bevæger sig med stor fart (forenkles til 9 km højde og 0,9978). Hvordan kan myoner observeres på jordoverfladen, når de kun kan bevæge sig 600 m i deres levetid?

* Set fra myonen er strækningen ned til jorden ikke 9 km, men 15 gange kortere (længdeforkortelsen), og kan derfor godt nå ned
* Set fra jorden lever myonen 15 gange længere (tidsforlængelsen), og kan derfor godt nå ned.

**Opgave 11**

1. Vis, at en myon kan bevæge sig 600 m på $2 μs.$

(Benyt $2 μs= 2∙10^{-6 }s$ og $v\_{myon}≈3∙10^{8} m/s$)

1. Vis, at gamma-faktoren $γ\left(0,9978 c\right)=15$ (se definition af gamma-faktoren side 3)

## 7. Perspektivering til GPS

**Hvorfor er GPS-modtageren afhængig af begge relativitetsteorier?**

GPS (**G**lobal **P**ositioning **S**ystem) benytter sig af satellitter, der bevæger sig med farten 4 km/s i højden 20000 km over jordens overflade. GPS-modtageren ved hele tiden hvor satellitterne befinder sig, og modtagerens afstand til satellitten bestemmes via rejsetiden for et radiosignal. GPS-modtageren kan så beregne dens position, på samme måde som man kan bestemme sin position ud fra afstanden til to byer. Radiosignalet indeholder information om hvornår det blev afsendt (satellittens ur), og GPS-modtageren måler tiden for modtagelsen. Da satellitterne både har fart på, og befinder sig i et svagere tyngdefelt, skal radiosignalets rejsetid korrigeres via begge relativitetsteorier, da tiden både påvirkes af bevægelse og af tyngde. <https://www.livescience.com/58245-theory-of-relativity-in-real-life.html>

## Videoer

Fermilab, Don Lincoln, Does photons experience time

<https://www.youtube.com/watch?v=6Zspu7ziA8Y>

# Why can't you go faster than light?Fermilab Don Lincoln

<https://www.youtube.com/watch?v=A2JCoIGyGxc&t=378s>

Twin paradox:

Ask a spaceman, Paul M Sutter, Califonia Polytecnic State University, 12 min.

Præsenterer den mest udbredte løsning

<https://www.youtube.com/watch?v=d_tL1vqLBBQ>

Sabine Hossenfelder, tvillingeparadokset, Newtons spand og hvorfor sorte huller får tiden til at gå langsomt

<https://www.youtube.com/watch?v=ZdrZf4lQTSg&t=33s>

Don Lincoln Fermi Lab

<https://www.youtube.com/watch?v=vnGWDYfweTI>

<https://www.youtube.com/watch?v=GgvajuvSpF4>

## Litteratur

<https://nbi.ku.dk/nyheder/temaer/atomure/>

<https://videnskab.dk/naturvidenskab/tidens-relative-gang/>

Behoozi, F. *A simple derivation of time dilation and length contraction in special relativity*, The Physics Teacher, vol 52, October 2014

<https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.4895356>

Morin, D. 2016, Speciel relativity for beginners, Chapter 1

<https://bpb-us-e1.wpmucdn.com/sites.harvard.edu/dist/0/550/files/2023/11/relativity_chap_1.pdf>

Graigh, S., 2008, Relativity notes, Australian National University. Et vandret og lodret lys-ur skal vise den samme tid pga. relativitetsprincippet

<http://people.physics.anu.edu.au/~cms130/vrproject/resources/Notes_Relativity_2008.pdf>

University of central Florida, chap. 28, Special Relativity

Længdeforkortelsen direkte ud fra tidsforlængelsen

<https://pressbooks.online.ucf.edu/algphysics/chapter/length-contraction/>

Greene, Brian. Professor of Physics and Mathematics at Columbia University

Video der viser: Hvis et vandret og et lodret ur viser den samme tid, så må det vandrette være kontraheret i bevægelsesretningen

<https://worldscienceu.com/lessons/18-4-horizontal-light-clock/>

Norton J., University og Pittsburg. Et vandret og lodret lysur skal vise den samme tid pga. relativitetsprincippet

<https://sites.pitt.edu/~jdnorton/teaching/HPS_0410/chapters/Special_relativity_clocks_rods/index.html>

Clock postulate. *Tidsforlængelse gælder også i et accelereret system*

<https://math.ucr.edu/home/baez/physics/Relativity/SR/clock.html>

General relativitetsteori.

Gravity is not a force, Veritasium

<https://www.youtube.com/watch?v=XRr1kaXKBsU>

# Gravity is not a force. But what does that mean? Sabina Hossenfelder, 15 min.

<https://www.youtube.com/watch?v=R3LjJeeae68&t=631s>

1. <http://www.fysikhistorie.dk/merer2/huymer2.html> [↑](#footnote-ref-1)