## Argumentation for sandsynligheder i binomialfordelingen, mat B

**Antagelser bag binomialfordelingen**

1. Et eksperiment hvor der kun er to udfald
2. Eksperimentet gentages *n* gange
3. Sandsynligheden for hvert af de to udfald ændrer sig ikke
4. Udfaldet ved hver gentagelse er uafhængigt af de forudgående udfald

**BINS** = **B**inary outcome, **I**ndependent trials, **N**umber *n* constant, **S**ame *p* per trial

Hvis det er et terningkast, kan den stokastiske variabel *X* være antal *seksere* i de *n* kast. Antagelsen om uafhængighed gælder ikke i et spil kort, hvor sandsynlighed for at få et es afhænger af om man allerede har trukket et es.

**To kast med en terning (symmetrisk sandsynlighedsfelt)**

****

I to kast med en terning er der 36 udfald, der er lige sandsynlige. Derfor kan sandsynlighedsfordelingen vi fandt ovenfor, også fås ved at tælle de gunstige og dividere med de 36 mulige udfald. Af figuren ses, at der er 1 *dobbeltsekse*r og 10 udfald med 1 *sekser* og 1 *ikke-sekser* samt *25* udfald uden en sekser.



**To kast med en terning (binomialfordelingen)**



Lad den stokastiske variabel *X* angive antal 6-er i 2 kast med en terning.

$$P\left(X=2\right)=P\left(6,6\right)= \frac{1}{6}∙\frac{1}{6}$$

$$P\left(X=1\right)=P\left(6,i6\right)+P\left(i6,6\right)=\frac{1}{6}∙\frac{5}{6}+\frac{5}{6}∙\frac{1}{6}=2∙\frac{1}{6}∙\frac{5}{6}$$

$$P\left(X=0\right)=P\left(i6,i6\right)=\frac{5}{6}∙\frac{5}{6}$$

*Addition*. Sandsynligheden for at få én *sekser* i to kast, kan får på to måder, *sekser* i det første kast eller en *sekser* i anden kast.

*Multiplikation*. Sandsynligheden for at få en *sekser* i første kast og en *ikke-sekser* i andet kast, fås ved at multiplicere sandsynlighederne.

Opskrivning med binomialkoefficienter

$$P\left(X=2\right)=K(2,2)∙\left(\frac{1}{6}\right)^{2}∙\left(\frac{5}{6}\right)^{2-2}=1∙\left(\frac{1}{6}\right)^{2}∙\left(\frac{5}{6}\right)^{0} \frac{1}{36}$$

$$P\left(X=1\right)=K\left(2,1\right)∙\left(\frac{1}{6}\right)^{1}∙\left(\frac{5}{6}\right)^{2-1}= 2∙\left(\frac{1}{6}\right)^{1}∙\left(\frac{5}{6}\right)^{1}=\frac{10}{36}$$

$$P\left(X=0\right)=K\left(2,0\right)∙\left(\frac{1}{6}\right)^{0}∙\left(\frac{5}{6}\right)^{2-0}=1∙\left(\frac{1}{6}\right)^{0}∙\left(\frac{5}{6}\right)^{2}= \frac{25}{36}$$

Læg mærke til at summen af sandsynligheder giver 1

**Tre kast med en terning**

Opfattes tre kast med en terning som en gentagelse af eksperiment med to udfald, *sekser* eller *ikke-sekser*, hvor $P\left(6\right)=1/6$ og hvor $P\left(ikke 6\right)=P\left(i6\right)=5/6$.

$$P\left(X=3\right)=K(3,3)∙\left(\frac{1}{6}\right)^{3}∙\left(\frac{5}{6}\right)^{0}= \frac{1}{216}$$

$$P\left(X=2\right)=K(3,2)∙\left(\frac{1}{6}\right)^{2}∙\left(\frac{5}{6}\right)^{1}= \frac{15}{216}$$

$$P\left(X=1\right)=K(3,1)∙\left(\frac{1}{6}\right)^{1}∙\left(\frac{5}{6}\right)^{2}= \frac{75}{216}$$

$$P\left(X=0\right)=K(3,0)∙\left(\frac{1}{6}\right)^{0}∙\left(\frac{5}{6}\right)^{3}= \frac{125}{216}$$

Læg mærke til at summen af sandsynligheder giver 1. Nedenfor er vist de tre kast i et *træ-diagram*, hvor de optrukne streger viser de tre veje til at få 1 sekser i 3 kast.

$$P\left(X=1\right)=\frac{1}{6}∙\frac{5}{6}∙\frac{5}{6}+\frac{5}{6}∙\frac{1}{6}∙\frac{5}{6}+\frac{5}{6}∙\frac{5}{6}∙\frac{1}{6}=\frac{75}{216}$$



### Beregning af sandsynligheder uden tilbagelægning

*Problem.* 4 røde og 6 blå kugler ligger i en krukke. Vi vil bestemme sandsynligheden for at få 2 røde og 1 blå kugle.

**Metode 1.** *Kugle-krukke model*

Der udtages samtidigt 3 kugler, så antal mulige udfald bliver $K\left(10,3\right).$ Da kuglerne udtages tilfældigt, er alle udfald lige sandsynlige. Den stokastisk variabel *X* tæller antallet af røde i stikprøven. Antal gunstige udfald fås for at vælge 2 røde ud af de 4 røde ($K\left(4,2\right) $og 1 blå ud af de 3 blå ($K(6,1))$. Ifølge multiplikationsprincippet bliver antallet af gunstige muligheder $K(4,2)∙K(6,1)$

$$P\left(X=2\right)=\frac{antal gunstige}{antal mulige}=\frac{K(4,2)∙K(6,1)}{K(10,3)}=\frac{6∙6}{120}=\frac{36}{120}=\frac{9}{30}$$

**Metode 2.** *Produkt og sum af afhængige sandsynligheder*

Hvis vi udtager én kugle ad gangen uden tilbagelægning, er der forskellige måder at få 2 røde og 1 blå.

$$P\left(X=2\right)=P\left(R og R og B\right)+\left(R og B og R\right)+\left(B og R og R\right)$$

$$=\frac{4}{10}∙\frac{3}{9}∙\frac{6}{8}+\frac{4}{10}∙\frac{6}{9}∙\frac{3}{8}+\frac{6}{10}∙\frac{4}{9}∙\frac{3}{8}=\frac{216}{720}=\frac{9}{30}$$

Hvis det var med tilbagelægning, ville vi have konstante sandsynligheder

 $P\left(R\right)=\frac{4}{10} og P\left(B\right)=\frac{6}{10}$

$$P\left(X=2\right)=K\left(3,2\right)∙\left(\frac{4}{10}\right)^{2}∙\left(\frac{6}{10}\right)^{1}=3∙\frac{96}{1000}=\frac{288}{1000}≈0,29$$

Hvis det var med tilbagelægning, ville vi have konstante sandsynligheder

 $P\left(R\right)=\frac{5}{8}$ og $P\left(B\right)=\frac{3}{8}$

$$P\left(X=2\right)=K\left(3,2\right)∙\left(\frac{4}{10}\right)^{2}∙\left(\frac{6}{10}\right)^{1}=3∙\frac{96}{1000}=\frac{288}{1000}≈0,29$$

*I samtale-delen kan man fx uddybe forskellen mellem at multiplicere og addere sandsynligheder*

### Multiplikation eller addition af sandsynligheder



**Eksempel 1.** *Multiplikation af sandsynligheder*

Vi kaster en terning én gang og ser på de to hændelser *A* og *B* og på fællesmængden, der består af elementer, der ligger i *både* *A* *og* *B*

$$A= \left\{1,3,5\right\} B= \left\{4,5,6\right\} og både A og B=\left\{5\right\}$$

$$P\left(A\right)=\frac{3}{6} og P\left(B\right)=\frac{3}{6} $$

$$P\left(både A og B\right)=\frac{1}{6}\ne P\left(A\right)∙P\left(B\right)=\frac{3}{6}∙\frac{3}{6}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

Sandsynligheden for hændelsen *B* er afhængig af om hændelsen *A* er indtruffet.

1. Hvis A er indtruffet, er sandsynligheden for B givet ved: $P\left(B, hvis A\right)=\frac{1}{6}$
2. Hvis A ikke er indtruffet, er sandsynligheden B givet ved: $P\left(B, hvis ikke A\right)=\frac{2}{6}$



**Eksempel 2. Addition af sandsynligheder**

Vi kaster en terning én gang og ser på de to hændelser *A* og *B* og på foreningsmængden, der består af elementer, der ligger i *enten* *A* *eller* *B*

$$A= \left\{1,3,5\right\} B= \left\{4,5,6\right\} og A eller B=\left\{1,3,4,5,6\right\}$$

$$P\left(A\right)=\frac{3}{6} og P\left(B\right)=\frac{3}{6} $$

$$P\left(A eller B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(både A og B\right)=\frac{3}{6}+\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=\frac{3+3-1}{6}=\frac{5}{6}$$

*Man kan kun addere sandsynligheder af to hændelser, hvis fællesmængden er tom.*

kilder

# An Introduction to the Binomial Distribution, jbstatistics, kun de første 9 min.

<https://www.youtube.com/watch?v=qIzC1-9PwQo&t=719s>

# An Introduction to the Hypergeometric Distribution, jbstatistics, kun de første 5 min

<https://www.youtube.com/watch?v=L2KMttDm3aY>

# Binomial Distribution EXPLAINED with Examples, BINS

<https://www.youtube.com/watch?v=rvg9oUHtX50>

<https://support.minitab.com/en-us/minitab/help-and-how-to/statistics/basic-statistics/supporting-topics/tests-of-proportions-and-variances/what-are-independent-trials/>

<https://www.lsu.edu/faculty/bratton/7964/lecture7.htm>