# Jensens ulighed

**Definitioner af en konveks funktion via sekanter, tangenter og den dobbelt afledede funktion**

1. Hvis sekanten mellem to vilkårlige punkter på grafen for *f*, ligger over grafen, så er grafen for *f* konveks
2. Hvis grafen for *f* ligger over alle sine tangenter i et interval, så er grafen for *f* konveks
3. Hvis $f^{''}\left(x\right)>0 $i et interval, så er grafen for *f* konveks i intervallet



Hvis $f^{''}\left(x\right)>0$, så er $f^{'}\left(x\right)$ voksende, og de negative tangenthældninger bliver mindre stejle og de positive tangenthældninger bliver mere stejle. Tangenterne drejes overalt mod uret.

**Jensens ulighed**

For to vilkårlige punkter på grafen for en funktion

$$f(x) er konveks ⇔f\left(\frac{x\_{1}+x\_{2}}{2}\right)<\frac{f\left(x\_{1}\right)+f(x\_{2})}{2}$$

For en konkav funktion er $f^{''}\left(x\right)<0$, og ulighedstegnet vender den anden vej

*Uligheden udtryk med ord.*

Funktionsværdien af *x*-middeltallet er mindre end middeltallet af funktionsværdierne.

**Opgave 1**

1. Betragt funktionen $f\left(x\right)= 2x$. Vis via beregning, at

$$f\left(\frac{1+3}{2}\right)=\frac{f\left(1\right)+f(3)}{2}$$

1. Betragt funktionen $g\left(x\right)= x^{2}$. Vis via beregning, at

$$g\left(\frac{1+3}{2}\right)<\frac{g\left(1\right)+g(3)}{2}$$

1. Betragt funktionen $h\left(x\right)= \sqrt{x}$. Vis via beregning, at

$$h\left(\frac{1+9}{2}\right)>\frac{h\left(1\right)+h(9)}{2}$$



På begge grafer er midtpunktet mellem *x*-værdierne $x\_{1}=1$ og $x\_{2}=3$,

$$\frac{x\_{1}+x\_{2}}{2}=\frac{1+3}{2}=2$$

men på konvekse graf til højre er midtpunktet mellem *y*-værdierne større end $f\left(2\right)=4$

$$\frac{f\left(x\_{1}\right)+f(x\_{2})}{2}=\frac{f\left(1\right)+f(3)}{2}=\frac{1+9}{2}=5$$

**Bevis for, at Jensens ulighed gælder for kvadratfunktionen** $g\left(x\right)= x^{2}$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2}\leq \frac{a^{2}+b^{2}}{2}⇔$$

$$\frac{a^{2}+b^{2}+2ab}{4}\leq \frac{a^{2}+b^{2}}{2}⇔$$

$$a^{2}+b^{2}+2ab\leq 2\left(a^{2}+b^{2}\right)$$

$$0\leq a^{2}+b^{2}-2ab⇔$$

$$0\leq \left(a-b\right)^{2}$$

Da den sidste ulighed altid er sand, er den første ulighed også sand

**Opgave 2**

Argumenter for rigtigheden af nedenstående biimplikationer ($⇔)$



**Opgave 3**

Omform formel (1) hos Jensen til den form der blev anvendt på side 1

Jensen, Johan Ludvig William Valdemar, Mathematica Scandinavia, 1906. Om konvekse Funktion og Uligheder mellem Middelværdier.

 [*Jensen, J. L. W. V.*](https://en.wikipedia.org/wiki/Johan_Jensen_%28mathematician%29)*(1906).*[*"Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes"*](https://zenodo.org/record/2371297)*.*[*Acta Mathematica*](https://en.wikipedia.org/wiki/Acta_Mathematica)*.****30****(1): 175–193.*[*doi*](https://en.wikipedia.org/wiki/Doi_%28identifier%29)*:*[*10.1007/BF02418571*](https://doi.org/10.1007/BF02418571)*.*

<https://zenodo.org/records/2371297>

Samme år udgav Johannses, V. Jensen sin berømte digtsamling, hvor jeg har medtaget to vers fra digtet *Ved frokosten*





Johannes V. Jensen, Digte

<https://kalliope.org/da/work/jensenjv/1906>