BØRNE- OG UNDERVISNINGSMINISTERIET
STYRELSEN FOR UNDERVISNING OG KVALITET

Matematik A

Studentereksamen

Ny ordning

ny-1stx211-MAT/A-26052021

Onsdag den 26. maj 2021
kl. 9.00-14.00

Opgavesættet er delt i to dele:

Delprøve 1: 2 timer kun med den centralt udmeldte formelsamling.
Delprøve 2: 3 timer med alle tilladte hjælpemidler.

Delprøve 1 består af opgave 1 – 8.

Delprøve 2 består af opgave 9 – 15.

Pointtallet er angivet ud for hvert spørgsmål.

Der gives i alt 250 point.

En del af spørgsmålene er knyttet til mindstekravene.
Disse spørgsmål er markeret med grøn farve.

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen.
I bedømmelsen af helhedsindtrykket af besvarelsen af de enkelte opgaver lægges særlig vægt på følgende fire punkter:

- *Redegørelse og dokumentation for metode*
  Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte løsningsstrategi med dokumentation i form af et passende antal mellemregninger eller matematiske forklaringer på metoden, når et matematisk værktøjsprogram anvendes.

- *Figurer, grafer og andre illustrationer*
  Besvarelsen skal indeholde hensigtsmæssig brug af figurer, grafer og andre illustrationer, og der skal være tydelige henvisninger til brug af disse i den forklarende tekst.

- *Notation og layout*
  Besvarelsen skal i overensstemmelse med god matematisk skik opstilles med hensigtsmæssig brug af symbolsprog. Hvis der anvendes matematisk notation, der ikke hører til standardviden, skal der redegøres for betydningen.

- *Formidling og forklaring*
  Besvarelsen af rene matematikopgaver skal indeholde en angivelse af givne oplysninger og korte forklaringer knyttet til den anvendte løsningsstrategi beskrevet med brug af almindelig matematisk notation.
  Besvarelsen af opgaver, der omhandler matematiske modeller, skal indeholde en kort præsentation af modellens kontekst, herunder betydning af modellens parametre. De enkelte delspørgsmål skal afsluttes med en præcis konklusion præsenteret i et klart sprog i relation til konteksten.

Delprøve 1

Kl. 09.00 – 11.00

Opgave 1 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}2t+1\\ t^2-4t\end{pmatrix}.$$

(10 point) a) Bestem $\vec{s}(1)$.

(10 point) b) Bestem $\vec{s}\,'(t)$.

Opgave 2 En funktion *f* er bestemt ved

$$f(x)=6x^2+\frac{1}{x},\qquad x>0.$$

(10 point) a) Bestem en forskrift for den stamfunktion til *f*, hvis graf går gennem $P(1,7)$.

Opgave 3 En funktion *f* af to variable er bestemt ved

$$f(x,y)=x^3+4x+x\cdot y+y^2.$$

(10 point) a) Bestem $f(2,3)$.

(10 point) b) Bestem gradienten for *f* i punktet $(2,3,f(2,3))$.

Opgave 4 En funktion *f* er løsning til differentialligningen

$$y'=x\cdot y+5.$$

Det oplyses, at grafen for *f* går gennem punktet $P(1,10)$.

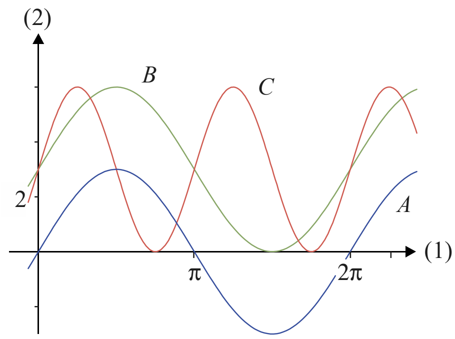
(10 point) a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet *P*.

Opgave 5 På figuren ses graferne *A*, *B* og *C* for tre harmoniske svingninger.

Til opgaven hører et bilag

En harmonisk svingning *f* er bestemt ved

$$f(x)=3\cdot\sin(x)+3.$$



(10 point) a) Gør rede for, hvilken af de tre grafer *A*, *B* og *C*, der er graf for *f*.
Benyt eventuelt vedlagte bilag.

Opgave 6 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (x^2 - x - 2) \cdot \mathrm{e}^x.$$

(10 point) a) Bestem $f'(x)$.

(10 point) b) Løs ligningen $(x^2 - x - 2) \cdot \mathrm{e}^x = 0$.

Opgave 7 En differensligning er givet ved

$$y_{n+1} = 3 \cdot y_n + 1, \quad n = 0,1,2,...$$

Det oplyses, at $y_0 = 10$.

(10 point) a) Bestem y_1 og y_2.

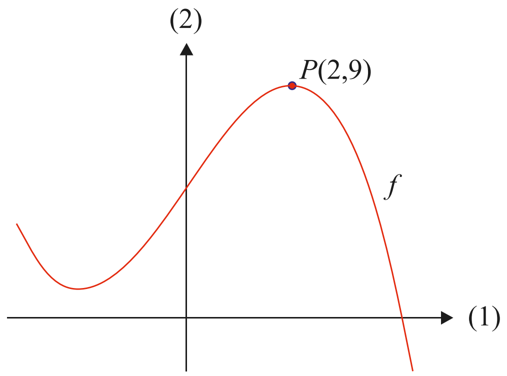
(10 point) b) Opskriv løsningen til differensligningen på lukket form.

Opgave 8 En funktion f er givet ved

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x + 5,$$

hvor a og b er konstanter.

Det oplyses, at f har et lokalt maksimum i $P(2,9)$.



(10 point) a) Bestem a og b.

Besvarelsen afleveres kl. 11.00

Delprøve 2

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 9 En normalfordelt stokastisk variabel X har middelværdi $\mu = 60$ og spredning $\sigma = 5$.

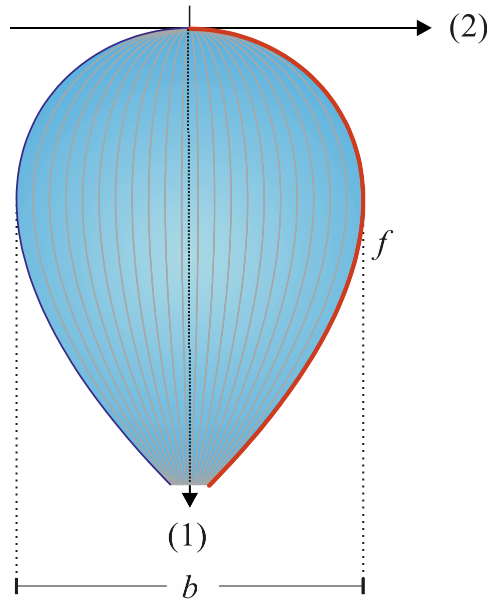
(10 point) a) Bestem $P(X \leq 70)$.

Opgave 10 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 0{,}126 \cdot (45 - x^{1{,}2}) \cdot x^{0{,}5}, \quad 0 \leq x \leq 23.$$

Grafen for f, koordinatsystemets førsteakse og linjen med ligningen $x = 23$ afgrænser et område M, der har et areal.

I en model kan formen af en varmluftsballon beskrives ved det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M roteres 360° omkring førsteaksen i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser.



(10 point) a) Benyt modellen til at bestemme volumen af ballonen.

(10 point) b) Benyt modellen til at bestemme bredden b af ballonen (se figuren).

Opgave 11 En differentialligning er givet ved

$$y' = y + x^2.$$

(10 point) a) Tegn et hældningsfelt for differentialligningen.

Det oplyses, at funktionen f er løsning til differentialligningen, og at grafen for f går gennem punktet $P(0,-1)$.

(10 point) b) Bestem en forskrift for f.

Opgave 12 En funktion *f* er bestemt ved

$$f(x)=x^3+x-5.$$

(10 point) a) Bestem de to næste elementer x_1 og x_2 i talfølgen, der er løsning til differensligningen hørende til Newton-Raphsons metode med startgættet $x_0=1$.

(10 point) b) Løs ligningen $f(x)=0$, og sammenlign resultatet med x_2 i løsningen til differensligningen hørende til Newton Raphsons metode med startgæt $x_0=1$.

Opgave 13

Grafik: www.colourbox.dk

En isproducent har undersøgt det daglige isforbrug blandt en række forbrugere. Tabellen viser sammenhørende værdier for det daglige isforbrug og middeltemperaturen den pågældende dag.

Middeltemperatur (målt i °C)	5,0	13,3	…	17,8	21,7
Isforbrug (målt i liter)	0,82	0,79	…	0,92	1,16

(*Hele tabellen med alle* 30 *datapunkter findes i bilaget IsForbrug.xlsx*)

I en model kan sammenhængen beskrives ved

$$f(x)=a\cdot x+b,$$

hvor $f(x)$ betegner det daglige isforbrug (målt i liter), og *x* betegner middeltemperatur (målt i °C).

(10 point) a) Benyt regression på tabellens data til at bestemme konstanterne *a* og *b*.

(10 point) b) Bestem et 95% konfidensinterval for *a*, og benyt dette til at afgøre, om der er statistisk belæg for, at sammenhængen mellem det daglige isforbrug og middeltemperaturen er voksende.

Opgave 14 En funktion *f* af to variable er givet ved

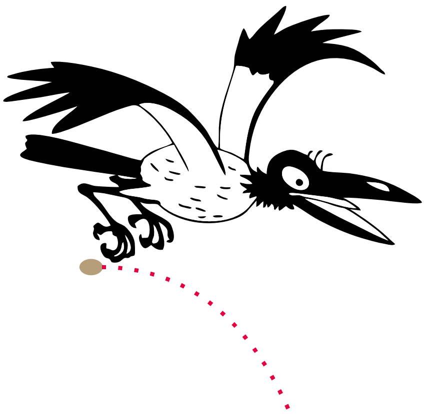
$$f(x,y)=(x-1)^2+(y-2)^3+4.$$

(10 point) a) Tegn grafen for *f* i grafvinduet $[0,2]\times[0,4]\times[0,10]$.

Det oplyses, at grafen for *f* har et stationært punkt i $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

(10 point) b) Bestem x_0 og y_0.

Opgave 15



Grafik: www.colourbox.dk

En krage flyver hen over en sti og taber en nød. I en model kan nøddens position i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser beskrives ved

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5t\\30-4{,}91\cdot t^2\end{pmatrix},\ \ t\geq 0\,,$$

hvor $\vec{s}(t)$ betegner stedvektoren til nøddens position over stien til tidspunktet t (målt i sekunder).

(10 point) a) Benyt modellen til at bestemme nøddens fart $\left|\vec{s}\,'(t)\right|$ til tidspunktet $t=1$.

Det oplyses, at længden af en parameterkurve med koordinatfunktioner x og y samt parameteren t i intervallet $[t_1,t_2]$ kan beregnes ved formlen

$$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\ dt.$$

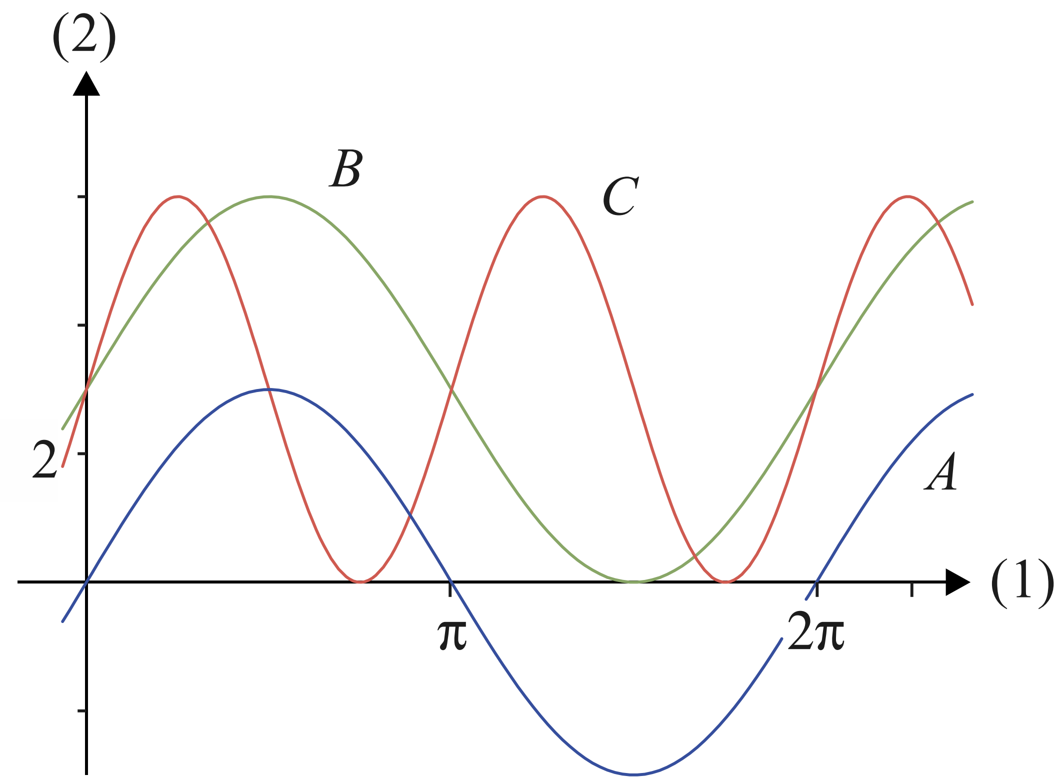
(10 point) b) Benyt modellen til at bestemme længden af den banekurve nødden følger, inden den rammer stien.

BILAG

Bilaget kan indgå i besvarelsen.

Skole	Hold		ID
Navn	Ark nr.	Antal ark i alt	Tilsynsførende

Opgave 5



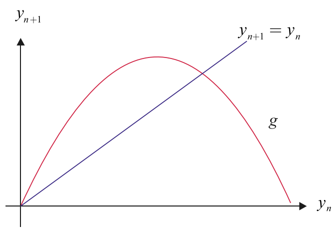
BILAG: Indstiksark til formelsamlingen fra forberedelsesmateriale

Differensligning af første orden (F1) $y_{n+1} = g(y_n),\ n = 0,1,2...$

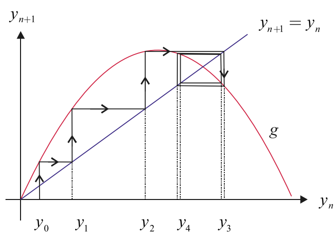
Lineær differensligning af første orden med konstante koefficienter (F2) $y_{n+1} = a \cdot y_n + b,\ n = 0,1,2...$

Løsning på lukket form (F3) $y_n = a^n \cdot y_0 + b \cdot \dfrac{a^n - 1}{a - 1},\quad n = 0,1,2,...,\ \ a \neq 0,\ a \neq 1.$

Cobwebdiagram (F4)



Cobwebdiagram



Cobwebdiagram med begyndelsesværdi y_0

Fikspunkt $\tilde{y}$ for differensligning af første orden $y_{n+1} = g(y_n)$

(F5) $g(\tilde{y}) = \tilde{y}$

(F6) $|g'(\tilde{y})| < 1$, stabilt (tiltrækkende)

$|g'(\tilde{y})| > 1$, ustabilt (frastødende)

Homogen lineær differensligning af anden orden med karakteristisk polynomium P

(F7) $y_{n+1} = \alpha \cdot y_n + \beta \cdot y_{n-1}\ ,\ \ \beta \neq 0,\ n = 1,2,3,....$

(F8) $P(x) = x^2 - \alpha \cdot x - \beta$, diskriminant D, rødder m_1 og m_2

(F9) $D > 0\ :\ y_n = C_1 \cdot m_1^{\,n} + C_2 \cdot m_2^{\,n}$

$D = 0\ :\ y_n = C_1 \cdot m_1^{\,n} + C_2 \cdot n \cdot m_1^{\,n}$

Newton-Raphsons differensligning til bestemmelse af nulpunkter (F10) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad n = 0,1,2,...$