BØRNE- OG
UNDERVISNINGSMINISTERIET
STYRELSEN FOR
UNDERVISNING OG KVALITET

Matematik A

Studentereksamen

Ny ordning

Mandag den 25. maj 2020
kl. 9.00-14.00

ny-1stx201-MAT/A-25052020

Opgavesættet er delt i to dele:

Delprøve 1: 2 timer kun med den centralt udmeldte formelsamling.
Delprøve 2: 3 timer med alle hjælpemidler.

Delprøve 1 består af opgave 1 − 8.

Delprøve 2 består af opgave 9 − 15.

Pointtallet er angivet ud for hvert spørgsmål.

Der gives i alt 250 point.

En del af spørgsmålene er knyttet til mindstekravene.
Disse spørgsmål er markeret med grøn farve.

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen.
I bedømmelsen af helhedsindtrykket af besvarelsen af de enkelte opgaver lægges særlig vægt på følgende fire punkter:

- *Redegørelse og dokumentation for metode*
  Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte løsningsstrategi med dokumentation i form af et passende antal mellemregninger eller matematiske forklaringer på metoden, når et matematisk værktøjsprogram anvendes.

- *Figurer, grafer og andre illustrationer*
  Besvarelsen skal indeholde hensigtsmæssig brug af figurer, grafer og andre illustrationer, og der skal være tydelige henvisninger til brug af disse i den forklarende tekst.

- *Notation og layout*
  Besvarelsen skal i overensstemmelse med god matematisk skik opstilles med hensigtsmæssig brug af symbolsprog. Hvis der anvendes matematisk notation, der ikke hører til standardviden, skal der redegøres for betydningen.

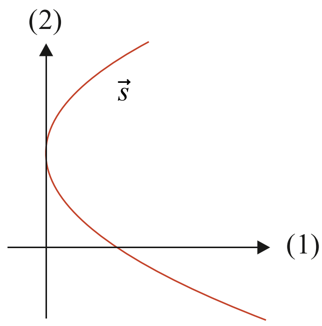
- *Formidling og forklaring*
  Besvarelsen af rene matematikopgaver skal indeholde en angivelse af givne oplysninger og korte forklaringer knyttet til den anvendte løsningsstrategi beskrevet med brug af almindelig matematisk notation.
  Besvarelsen af opgaver, der omhandler matematiske modeller, skal indeholde en kort præsentation af modellens kontekst, herunder betydning af modellens parametre. De enkelte delspørgsmål skal afsluttes med en præcis konklusion præsenteret i et klart sprog i relation til konteksten.

Delprøve 1

Kl. 09.00 – 11.00

Opgave 1 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t)=\begin{pmatrix}0,5\cdot t^2\\ 2\cdot t+6\end{pmatrix},\quad t\in \mathbb{R}.$$



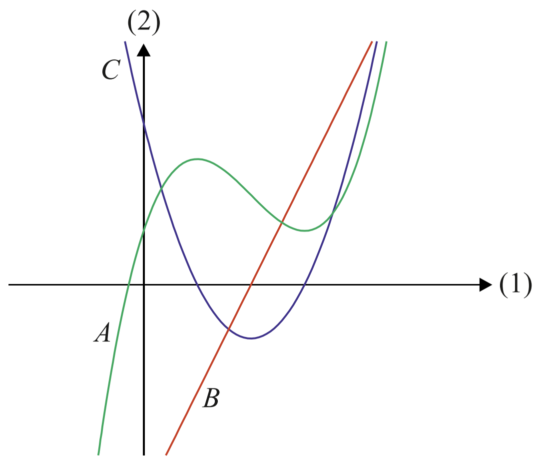
(10 point) a) Bestem $\vec{s}(1)$.

(10 point) b) Undersøg, om parameterkurven for $\vec{s}$ går igennem punktet $P(2,10)$.

Opgave 2 En funktion *f* er givet ved

$$f(x)=x^2-4x+3.$$

På figuren ses grafen for *f* sammen med grafen for dens afledede funktion f' samt grafen for en til *f* hørende stamfunktion *F*.



(10 point) a) Argumentér for, hvilken af graferne der hører til henholdsvis f', *f* og *F*.

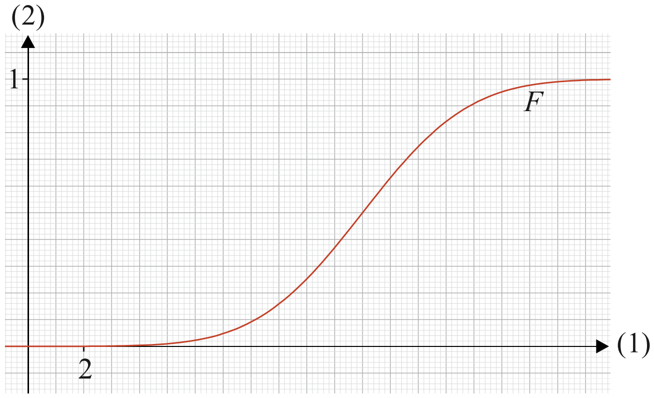
Opgave 3 a) Reducér udtrykket

(10 point)

$$\frac{a\cdot(4a+6)}{2a}.$$

Opgave 4

Til opgaven hører et bilag



Figuren viser grafen for fordelingsfunktionen F for en normalfordelt stokastisk variabel X.

(10 point) a) Bestem middelværdien for X.

Benyt eventuelt det vedlagte bilag.

Opgave 5

Grafik: freepik.com

Udviklingen i beløbet på en bankkonto kan beskrives ved differensligningen

$$y_{n+1} = 1{,}10 \cdot y_n + 2000, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

hvor y_n betegner beløbet på bankkontoen (målt i kr.) til tidspunktet n (målt i år).

(10 point) a) Bestem renten i procent, og angiv beløbet, der hvert år indsættes på kontoen.

På kontoen blev der indsat et startbeløb på 5000 kr.

(10 point) b) Bestem beløbet på kontoen til tidspunktet $n = 1$.

Opgave 6

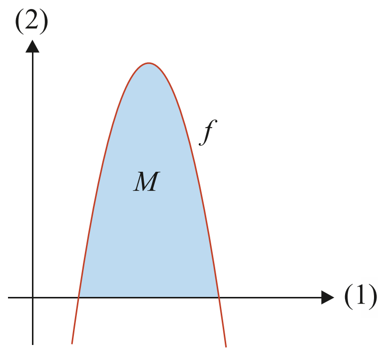
En funktion f er givet ved

$$f(x) = -3x^2 + 12x - 9.$$

(10 point) a) Løs ligningen $f(x) = 0$.

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen et område M, der har et areal.

(10 point) b) Bestem arealet af M.



Opgave 7 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 3x - 6 \cdot \ln(x), \quad x > 0.$$

En linje l er givet ved ligningen $y = 2x - 7$. Grafen for f har netop én tangent t, der er parallel med l.

(10 point) a) Bestem førstekoordinaten til røringspunktet mellem t og grafen for f.

Opgave 8 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = 2y \cdot (8 - y).$$

Grafen for f går gennem punktet $P(0,2)$.

(10 point) a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P.

(10 point) b) Bestem en forskrift for f.

Besvarelsen afleveres kl. 11.00

Delprøve 2

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 9 En harmonisk svingning f er givet ved

$$f(x) = 7 \cdot \sin(2x - 5) + 3, \qquad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

(10 point) a) Bestem minimum for f.

(10 point) b) Bestem perioden for f.

Opgave 10

Grafik: freepik.com

Tabellen viser sammenhørende værdier for statsgæld og arbejdsløshed i et bestemt land.

Arbejdsløshed (målt i % af arbejdsstyrken)	7,10	6,90	…	8,63	7,36
Statsgæld (målt i % af BNP)	81,6	79,1	…	73,2	69,5

(*Hele tabellen med alle* 42 *datapunkter findes i bilaget "Arbejdsløshed_Statsgæld.xlsx"*)

En arbejdsmarkedsforsker formoder, at statsgælden som funktion af arbejdsløsheden kan beskrives ved en lineær model

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor $f(x)$ betegner statsgælden (målt i % af BNP), og x betegner arbejdsløsheden (målt i % af arbejdsstyrken).

(10 point) a) Benyt tabellens data til at bestemme en forskrift for f.

(10 point) b) Bestem et 95% konfidensinterval for hældningskoefficienten for f, og afgør, om arbejdsmarkedsforskerens formodning er rimelig.

Kilde: http://www.oecd.org

Opgave 11 En funktion f er givet ved

$$f(x) = e^{2x-4}.$$

(5 point) a) Bestem $f'(x)$.

(10 point) b) Bestem kurvelængden af grafen for f i intervallet $1 \leq x \leq 3$.

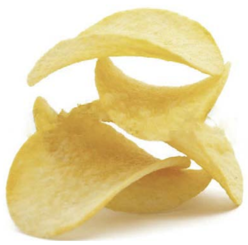
Opgave 12 En differensligning er givet ved

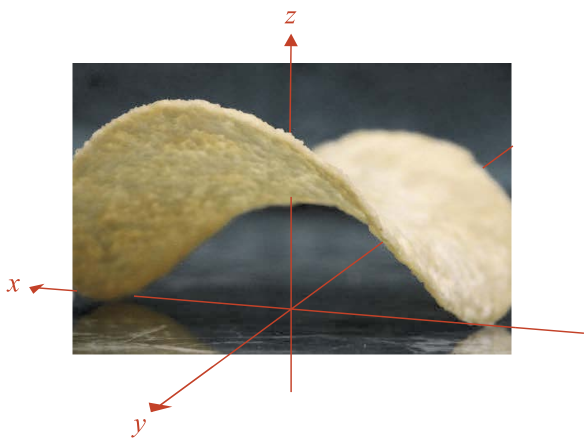
$$y_{n+1} = -\frac{1}{2}{y_n}^2 + 2y_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(5 point) a) Vis, at $\tilde{y} = 2$ er et fikspunkt for differensligningen.

(10 point) b) Undersøg, om fikspunktet $\tilde{y} = 2$ er stabilt eller ustabilt.

Opgave 13





På billedet til venstre ses en bestemt type chips. På figuren til højre er én af disse chips indlagt i et koordinatsystem med enheden cm på alle akser.

I en model kan chipsens form beskrives som en del af grafen for en funktion f givet ved

$$f(x, y) = 1 - \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4},$$

hvor $f(x, y)$ angiver chipsens højde over bordet.

(10 point) a) Tegn grafen for f i området $-3 \leq x \leq 3$ og $-2 \leq y \leq 2$.

Det oplyses, at chipsens form i modellen har et saddelpunkt P.

(10 point) b) Bestem koordinatsættet til punktet P.

Opgave 14 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 4 \\ t^3 + t^2 - 4t \end{pmatrix}, \quad -3 \leq t \leq 3.$$

Det oplyses, at parameterkurven for $\vec{s}$ har et dobbeltpunkt P på andenaksen.

(10 point) a) Bestem de to parameterværdier hørende til P.

(10 point) b) Bestem koordinatsættet til hvert af de to punkter på parameterkurven, hvor tangenten til parameterkurven er vandret.

Opgave 15 I et tomt tragtformet kar påbegyndes en løbende tilføring af en flygtig væske. Væsken fordamper løbende fra overfladen. I en model kan udviklingen i væskemængden i karret beskrives ved en funktion V, der er løsning til differentialligningen

$$\frac{dV}{dt} = 0{,}1 - 0{,}016 \cdot V^{\frac{2}{3}},$$

hvor $V(t)$ betegner væskemængden i karret (målt i L) til tidspunktet t (målt i timer efter påfyldningen begyndte).

(10 point) a) Bestem den hastighed, hvormed væskemængden i karret ændres, når væskemængden i karret er 10 L.

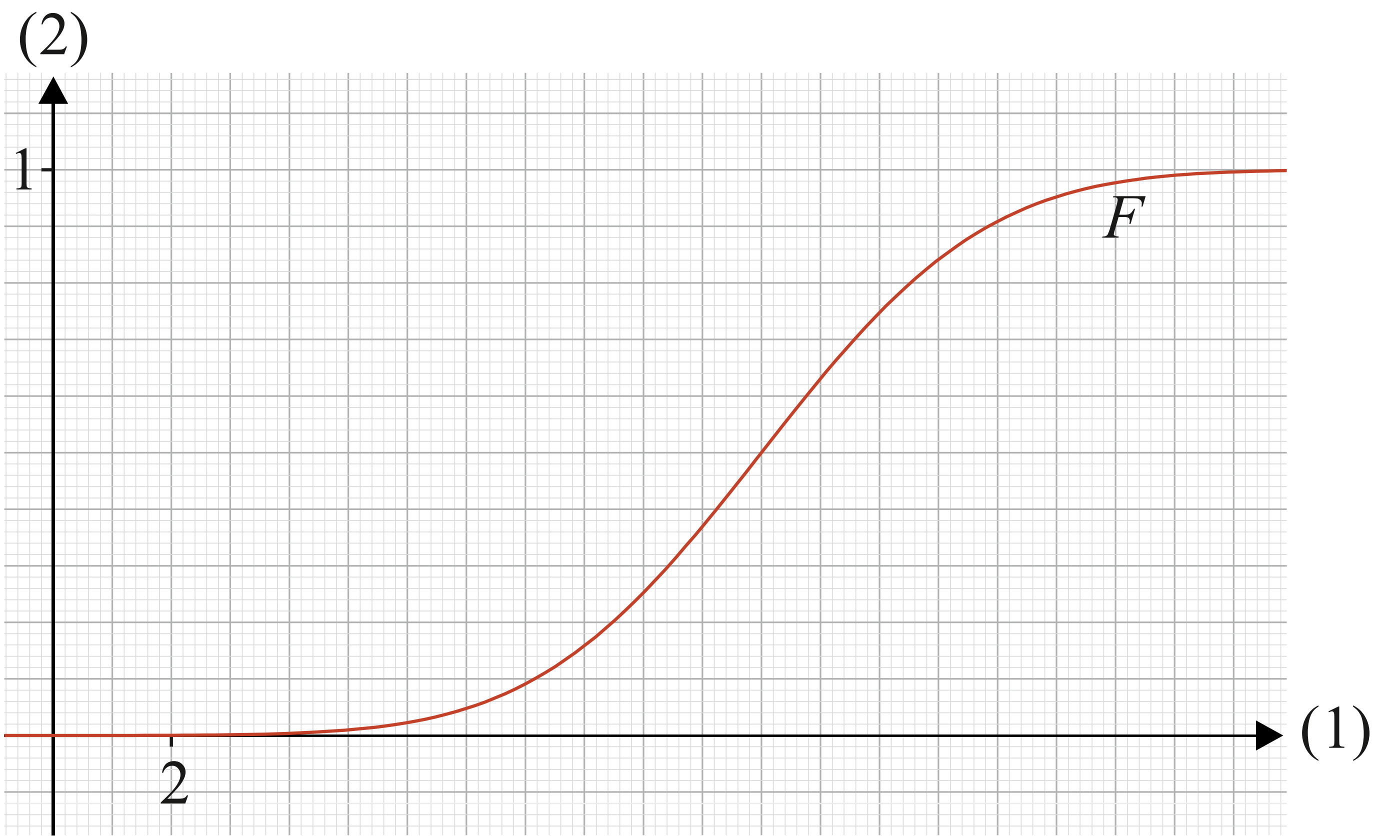
(10 point) b) Bestem den øvre grænse for væskemængden i karret.

BILAG

Bilaget kan indgå i besvarelsen.

Skole	Hold		ID
Navn	Ark nr.	Antal ark i alt	Tilsynsførende

Bilag til opgave 4



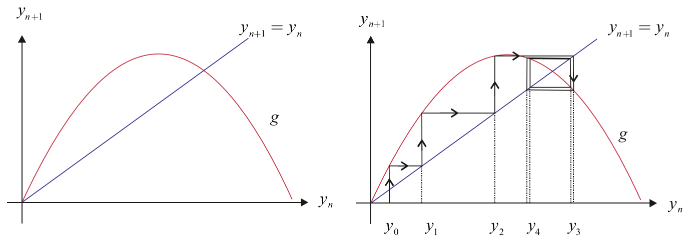
BILAG: Indstiksark til formelsamlingen fra forberedelsesmateriale

Differensligning af første orden (F1) $y_{n+1} = g(y_n),\ n = 0,1,2...$

Lineær differensligning af første orden med konstante koefficienter (F2) $y_{n+1} = a \cdot y_n + b,\ n = 0,1,2...$

Løsning på lukket form (F3) $y_n = a^n \cdot y_0 + b \cdot \dfrac{a^n - 1}{a - 1},\quad n = 0,1,2,...,\ a \neq 0,\ a \neq 1.$

Cobwebdiagram (F4)



Cobwebdiagram

Cobwebdiagram med begyndelsesværdi y_0

Fikspunkt $\tilde{y}$ for differensligning af første orden $y_{n+1} = g(y_n)$

(F5) $g(\tilde{y}) = \tilde{y}$

(F6) $|g'(\tilde{y})| < 1,$ stabilt (tiltrækkende)

$|g'(\tilde{y})| > 1,$ ustabilt (frastødende)

Homogen lineær differensligning af anden orden med karakteristisk polynomium P

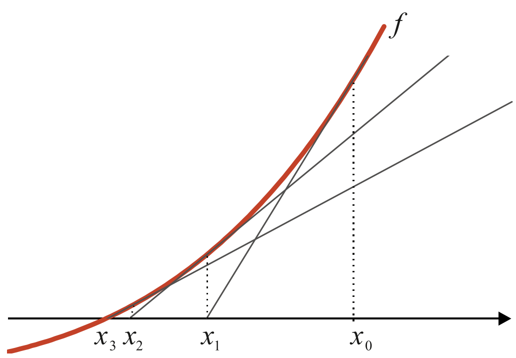
(F7) $y_{n+1} = \alpha \cdot y_n + \beta \cdot y_{n-1}\ ,\quad \beta \neq 0,\ n = 1,2,3,....$

(F8) $P(x) = x^2 - \alpha \cdot x - \beta$, diskriminant D, rødder m_1 og m_2

(F9) $D > 0\ :\ y_n = C_1 \cdot m_1^{\,n} + C_2 \cdot m_2^{\,n}$

$D = 0\ :\ y_n = C_1 \cdot m_1^{\,n} + C_2 \cdot n \cdot m_1^{\,n}$

Newton-Raphsons differensligning til bestemmelse af nulpunkter (F10) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad n = 0,1,2,...$



(1)