STX

STUDENTEREKSAMEN

BØRNE- OG UNDERVISNINGSMINISTERIET
STYRELSEN FOR UNDERVISNING OG KVALITET

MATEMATIK A

Onsdag den 6. december 2023
Kl. 9.00-14.00

stx233-MAT-A-06122023

Opgavesættet er delt i to dele:

Delprøve 1: 2 timer kun med den centralt udmeldte formelsamling, herunder vedlagte indstiksark til formelsamlingen.

Delprøve 2: 3 timer med alle tilladte hjælpemidler.

Delprøve 1 består af opgave 1-8.
Til delprøve 1 hører et bilag.

Delprøve 2 består af opgave 9-15.

Der gives 10 point for hvert spørgsmål.

En del af spørgsmålene er knyttet til mindstekravene.
Disse spørgsmål er markeret med grøn farve.

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen.
I bedømmelsen af helhedsindtrykket af besvarelsen af de enkelte opgaver lægges særlig vægt på følgende fire punkter:

- *Redegørelse og dokumentation for metode*
  Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte løsningsstrategi med dokumentation i form af et passende antal mellemregninger *eller* matematiske forklaringer på metoden, når et matematisk værktøjsprogram anvendes.

- *Figurer, grafer og andre illustrationer*
  Besvarelsen skal indeholde hensigtsmæssig brug af figurer, grafer og andre illustrationer, og der skal være tydelige henvisninger til brug af disse i den forklarende tekst.

- *Notation og layout*
  Besvarelsen skal i overensstemmelse med god matematisk skik opstilles med hensigtsmæssig brug af symbolsprog. Hvis der anvendes matematisk notation, der ikke hører til standardviden, skal der redegøres for betydningen.

- *Formidling og forklaring*
  Besvarelsen af rene matematikopgaver skal indeholde en angivelse af givne oplysninger og korte forklaringer knyttet til den anvendte løsningsstrategi beskrevet med brug af almindelig matematisk notation.
  Besvarelsen af opgaver, der omhandler matematiske modeller, skal indeholde en kort præsentation af modellens kontekst, herunder betydning af modellens parametre. De enkelte delspørgsmål skal afsluttes med en præcis konklusion præsenteret i et klart sprog i relation til konteksten.

Delprøve 1 kl. 9.00-11.00

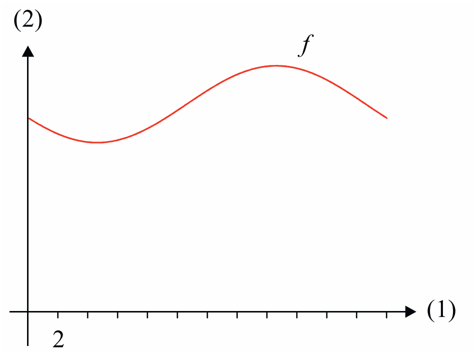
Opgave 1 En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x,y)=2x^4\cdot y+7x-y\,.$$

a) Bestem $f(1,-3)$.

b) Bestem $f_x'(x,y)$.

Opgave 2



Temperaturen i Lissabon gennem et bestemt døgn i juli måned kan med tilnærmelse beskrives ved funktionen

$$f(t)=4{,}2\cdot\sin(0{,}262\cdot t+3{,}5)+22{,}7\ ,\quad 0\le t\le 24\,,$$

hvor $f(t)$ er temperaturen (målt i grader celsius), og t er tiden målt i timer efter midnat.

a) Bestem den højeste og den laveste temperatur i dette døgn i Lissabon.

Opgave 3 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y'=28-7\cdot y\,.$$

Grafen for f går gennem punktet $P(0,2)$.

a) Bestem hældningskoefficienten for tangenten til grafen for f i punktet P.

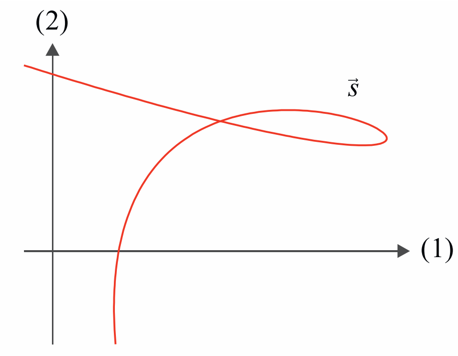
b) Bestem en forskrift for f.

Opgave 4 a) Reducér udtrykket

$$\frac{(a+b)^2-b^2}{a}\,.$$

Opgave 5 På figuren ses banekurven for vektorfunktionen $\vec{s}$ givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^3 + t^2 + 4t + 5 \\ \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + 4 \end{pmatrix}.$$



a) Bestem hastighedsvektoren $\vec{v}(t)$.

b) Bestem de t-værdier, hvor banekurven har en vandret tangent.

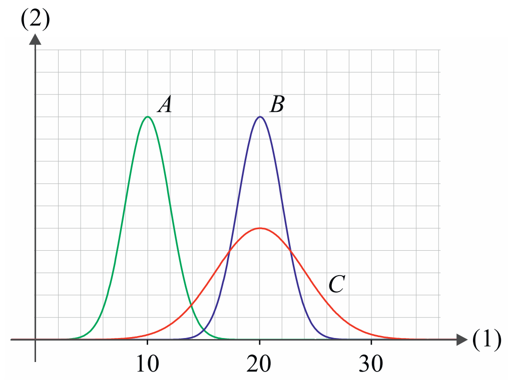
Opgave 6 Tæthedsfunktionerne for tre normalfordelte stokastiske variable er givet ved

Bilag vedlagt

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-20}{2}\right)^2}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 4}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-20}{4}\right)^2}$$

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-10}{2}\right)^2}$$



På figuren ses graferne A, B og C for de tre tæthedsfunktioner.

a) Gør rede for, hvilken af funktionerne der har B som graf. Brug bilaget.

Opgave 7 En ellipse er givet ved ligningen $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

a) Bestem koordinatsættet til hvert af ellipsens brændpunkter.

b) Bestem en ligning for tangenten til ellipsen i punktet $P(4, \frac{12}{5})$.

Opgave 8 a) Bestem integralet

$$\int x \cdot \cos(x^2 + 1)\, dx .$$

Besvarelsen af delprøve 1 afleveres kl. 11.00

Delprøve 2 kl. 9.00-14.00

Opgave 9 En vektorfunktion $\vec{s}$ er bestemt ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + t - 6 \\ 4 \cdot \sqrt{t^2 + 2} - 9 \end{pmatrix}.$$

a) Tegn banekurven for $\vec{s}$.

b) Bestem koordinatsættet til hvert af banekurvens skæringspunkter med førsteaksen.

Opgave 10

Billedkilde: Henrik Trygg

I en model kan tykkelsen af isen på en sø i en periode med frost beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dh}{dt} = \frac{93{,}5}{h},$$

hvor $h(t)$ betegner tykkelsen af isen (målt i mm) til tidspunktet t (målt i timer efter den første måling af isens tykkelse).

Til tidspunktet $t = 0$ har isen en tykkelse på 74 mm.

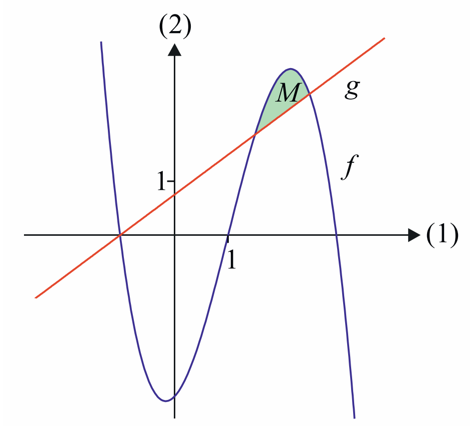
a) Benyt modellen til at bestemme væksthastigheden af isens tykkelse til tidspunktet $t = 0$.

b) Bestem en forskrift for $h(t)$.

Når isen har en tykkelse på 150 mm, er den sikker at skøjte på.

c) Hvor lang tid går der fra den første måling af isens tykkelse, til den er sikker at skøjte på?

Opgave 11



Figuren viser graferne for funktionerne *f* og *g* givet ved

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 3 \quad \text{og} \quad g(x) = 0{,}75x + 0{,}75\,.$$

a) Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem grafen for *f* og grafen for *g*.

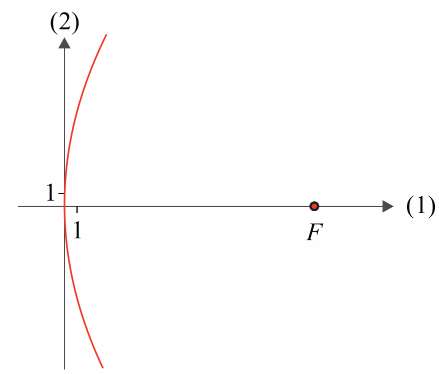
De to grafer afgrænser et område *M* i første kvadrant.

b) Bestem arealet af *M*.

c) Bestem omkredsen af *M*.

Opgave 12

Figur 1
Billedkilde: Eksperimentor



Figur 2

Figur 1 viser et billede af et solkomfur.

Et tværsnit af solkomfuret kan i en model beskrives ved en parabel med ligningen

$$y^2 = 81{,}6 \cdot x\,.$$

Denne parabel ses på figur 2. Længdeenheden på begge koordinatakser er centimeter. Når solens stråler reflekteres i den blanke overflade på solkomfuret, vil de samles i brændpunktet *F*, hvor der kan blive så varmt, at man kan få en kop vand til at koge.

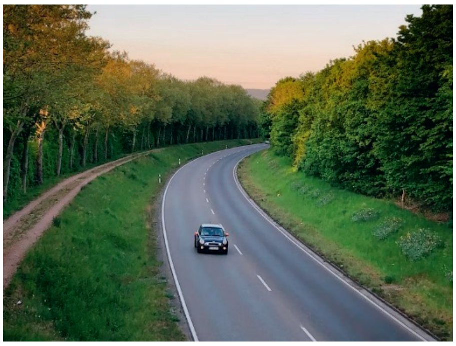
a) Benyt modellen til at bestemme koordinatsættet til brændpunktet *F*.

Opgave 13 En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x,y) = y^3 + x^2 + x \cdot y - 4y\,.$$

a) Undersøg, om gradienten $\nabla f(1,2)$ og vektoren $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ er ortogonale.

Opgave 14



Billedkilde: unsplash

I en model kan bilernes fart (målt i km/t) på en bestemt vejstrækning beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X med middelværdi $\mu = 76{,}1$ og spredning $\sigma = 7{,}2$.
Fartgrænsen på vejstrækningen er 80 km/t.

a) Bestem, hvor stor en andel af bilerne der ifølge modellen kører hurtigere end de tilladte 80 km/t.

b) Hvor hurtigt kører de 2 % af bilerne, der kører hurtigst?

Kilde: A comprehensive and unified framework for analysing the effects on injuries of measures influencing speed.

Opgave 15 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + k \cdot x + 2\,,\ \text{hvor } k \text{ er et tal.}$$

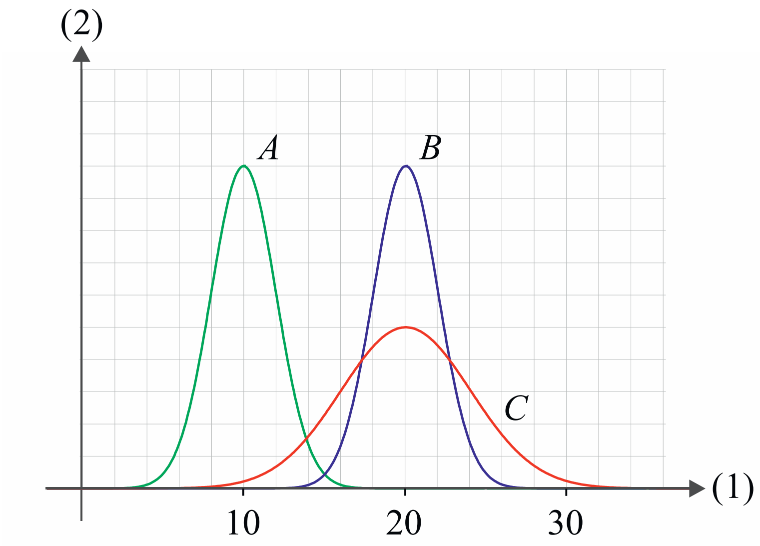
a) Bestem de værdier af k, hvor f er en voksende funktion.

BILAG stx matematik A december 2023

Bilaget indgår i opgavebesvarelsen

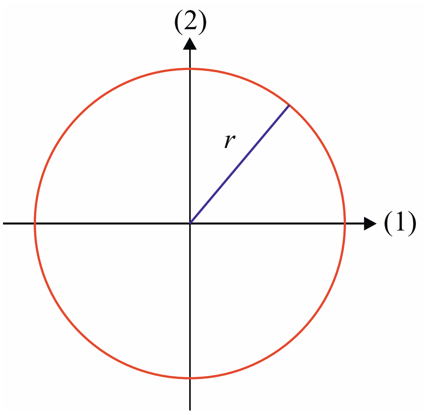
Skole		Hold	ID
Navn	Ark nr.	Antal ark i alt	Tilsynsførende

Opgave 6



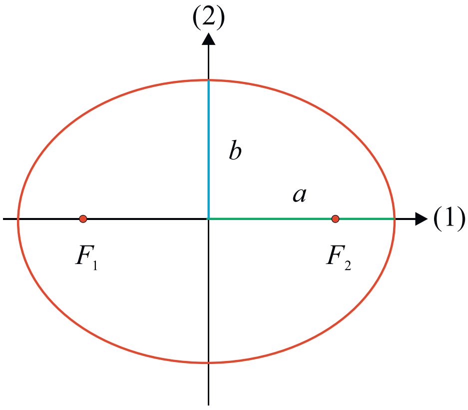
Besvarelsen af delprøve 1 afleveres kl. 11.00

Den generelle andengradsligning i to variable	F(1)	$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$



Cirkel

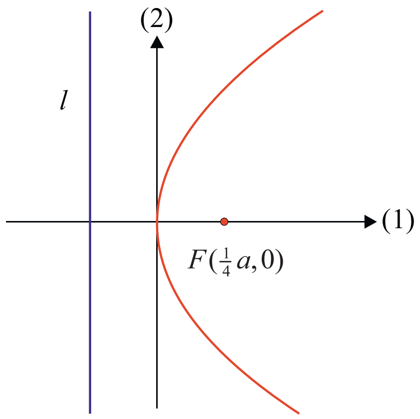
Ligning på normalform for cirkel med centrum $C(0,0)$ og radius r	F(2)	$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$



Ellipse

Areal A af ellipse med halvakser a og b	F(3)	$A = \pi \cdot a \cdot b$
Ligning på normalform for ellipse med centrum $C(0,0)$, den halve storakse a og den halve lilleakse b	F(4)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Koordinatsæt til brændpunkter for ellipse med centrum $C(0,0)$, den halve storakse a og den halve lilleakse b	F(5)	$F_1\left(-\sqrt{a^2-b^2},0\right)$ og $F_2\left(\sqrt{a^2-b^2},0\right)$
Ligning for tangenten i punktet $P(x_0,y_0)$ til ellipsen med centrum $C(0,0)$, den halve storakse a og den halve lilleakse b	F(6)	$\frac{x_0 \cdot x}{a^2} + \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1$

Ligning på normalform for parabel med ledelinje $l:\ y=-\frac{1}{4a}$	F(7)	$y=a\cdot x^2$
Koordinatsæt til brændpunkt F for parabel med ledelinje $l:\ y=-\frac{1}{4a}$	F(8)	$F\left(0,\frac{1}{4a}\right)$



Parabel

Ligning på normalform for parabel med ledelinje $l:\ x=-\frac{1}{4}a$	F(9)	$y^2=a\cdot x$
Koordinatsæt til brændpunkt F for parabel med ledelinje $l:\ x=-\frac{1}{4}a$	F(10)	$F(\frac{1}{4}a,0)$
Ligning for tangenten til parablen med ligningen $y^2=a\cdot x$ i punktet $P(x_0,y_0)$	F(11)	$y\cdot y_0=\frac{1}{2}a\cdot(x+x_0)$