

Udledning af den harmoniske serie $f_n = n \cdot f_1$

Når strengeinstrumenter (fx guitar, violin eller bas) udsender lyde, er det fordi strengene vibrerer med frekvenser som vores ører kan høre (mellem ca. 20 Hz og 20000 Hz)

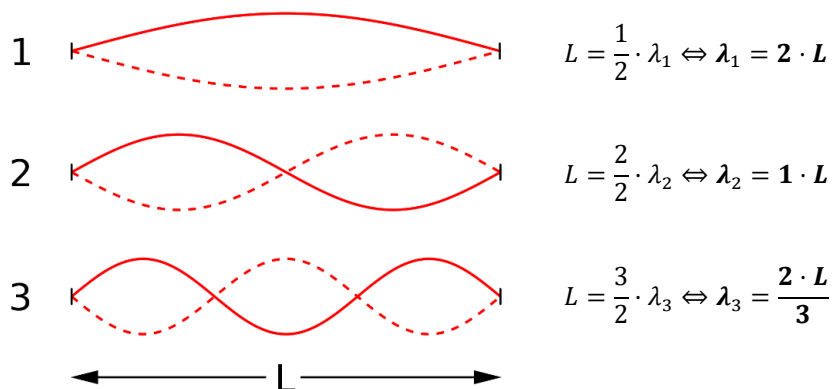
Strengenes svingninger sætter luftmolekylerne omkring dem i svingninger. Når disse svingninger når frem til vores ører og får vores trommehinder til at vibrere, hører vi lydene.

Når strengene svinger, laver de *stående bølger*, og derfor svinger en streng kun med nogle bestemte frekvenser, som skal passe med at der kan være en stående bølge på strengen.

Billedet herunder viser de første tre muligheder for en stående bølge på en streng med længden L , der er spændt fast i begge ender (som på en guitar).

Når strengen bevæger sig, er alle tre bølger (og også nr. 4, 5, 6, ... osv.) til stede på strengen på samme tid, men de er blandet sammen, så man kan ikke se forskel på dem. Desuden bevæger de sig også meget hurtigt, fx 440 Hz for tonen A – så 440 gange op og ned hvert sekund.

Nummer 1 kaldes grundtonen, nummer 2 kaldes første overtone, nummer 3 kaldes anden overtone. For nemheds skyld giver vi dem et tal n , så vi fx kan skrive $n = 2$ om den første overtone.



Tænk: Kig på mønsteret i formlerne for de første tre bølger ($L = \dots$), og giv et bud på hvordan formlerne må se ud for bølge nummer 4, 5 og 6.

I første billede ($n = 1$) kan vi se at der er en halv bølgelængde indenfor længden L . Det kan vi skrive som $L = \frac{1}{2} \cdot \lambda_1$.

Næste billede ($n = 2$) viser en hel bølgelængde, så vi kan skrive at $L = \frac{2}{2} \cdot \lambda_2$. I billede nummer 3 ($n = 3$) er $L = \frac{3}{2} \cdot \lambda_3$.

Ved siden af billederne er bølgelængden isoleret i de tre udtryk (fed skrift). Grunden til at alle bølgelængderne har et sænket tal (subscript) bagefter sig, er at det er forskellige bølgelængder for hvert tilfælde af de stående bølger (fx er λ_1 dobbelt så stor som λ_2), og tallet viser hvilket nummer i rækkefølgen det drejer sig om.

Nu kan vi bruge *bølgeformlen*, som siger at man kan finde en bølges hastighed ved at gange dens bølgelængde og frekvens sammen: $v = \lambda \cdot f$. Vi isolerer først frekvensen og sætter derefter bølgelængderne ovenfor ind.

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2 \cdot L}$$

$$f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{L} = 2 \cdot \frac{v}{2 \cdot L} = 2 \cdot f_1$$

$$f_3 = \frac{v}{\lambda_3} = \frac{3 \cdot v}{2 \cdot L} = 3 \cdot \frac{v}{2 \cdot L} = 3 \cdot f_1$$

Beregningerne til venstre viser os, at når man først har fundet frekvensen for *grundtonen* (f_1), så kan man finde frekvensen for *1. overtone* (f_2) ved at gange f_1 med 2, og frekvensen for *2. overtone* (f_3) ved at gange f_1 med 3. Dette mønster fortsætter, og derfor kan vi samle det hele og skrive at

$$f_n = n \cdot f_1$$

hvor n netop er nummeret på den stående bølge vist på billedet ovenfor.

Denne formel kaldes *den harmoniske serie*, og viser os hvilke frekvenser en stående bølge med længden L kan svinge med.