

KERNESTOF Mat 1, hf

Per Gregersen & Majken Sabina Skov

© 2021 Praxis Forlag A/S

Mekanisk, fotografisk, elektronisk eller anden gengivelse af denne bog eller dele heraf er kun tilladt efter Copy-Dans regler.

Forlagsredaktion: Iben Stampe Sletten
Billedredaktion: Ane Olsen
Principlayout og omslag: andresen design
Grafisk tilrettelægning: Schnalke Kommunikations-Design
Tryk: Livonia Print

1. udgave 5. oplag 2021

Kernestof Mat 1 er en revideret og delvist nyskrevet udgave af Kernestof Mat C.

ISBN 9788770821469



www.praxis.dk

Indhold

Forord 6

1. Modeller og variable 8

- 1.1 Ligninger og deres løsninger 10
- 1.2 Overslagsregning og principskitser 12
- 1.3 Modeller med to variable 14
 - Opgaver til kapitel 1 16
 - Træningssider 1 22

2. Lineære funktioner 24

- 2.1 Beregning af a og b i forskriften $f(x) = ax + b$ 26
- 2.2 Lineære modeller 28
- 2.3 Lineær regression 30
- 2.4 Lineær regression og residualplot 32
- 2.5 Ræsonnementer og beviser - lineære funktioner 34
 - Opgaver til kapitel 2 36
 - Træningssider 2 44

3. Statistik 46

- 3.1 Ikke-grupperede observationer 46
- 3.2 Diagrammer og kvartilsæt 48
- 3.3 Boksplot 50
- 3.4 Grupperede observationer 52
- 3.5 Diagrammer for grupperede observationer 54
 - Opgaver til kapitel 3 56
 - Træningssider 3 64

4. Sandsynlighedsregning og kombinatorik 66

- 4.1 Kombinatorik – tællemetoder 66
- 4.2 Permutationer 68
- 4.3 Kombination og binomialkoefficient 70
- 4.4 Sandsynlighedsregning 72
- 4.5 Sandsynlighedsfelt 74
- 4.6 Multiplikations- og additionsprincippet 76
- 4.7 Ræsonnementer og beviser – kombinatorik 78
 - Opgaver til kapitel 4 80
 - Træningssider 4 88

4. Sandsynlighedsregning og kombinatorik



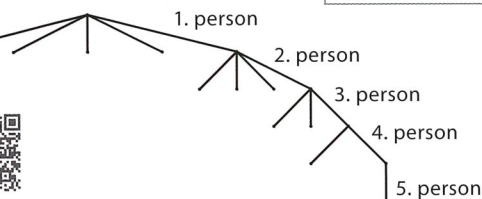
4.1 Kombinatorik – tællemetoder

1 Introduktion

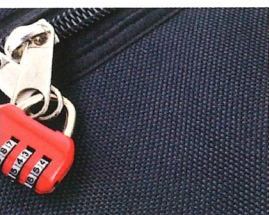
Kursisterne Line, Jens, Henriette, Victor og Laura stiller sig op i rækkefølge. Hvor mange forskellige rækkefølger kan de stille sig i?

Vi starter længst til venstre; der må være 5 muligheder for at vælge en person til at stå her, til næste plads er der nu kun 4 muligheder (da en person allerede er udtaget), osv. Skematisk har vi:

5 muligheder	4 muligheder	3 muligheder	2 muligheder	1 mulighed
--------------	--------------	--------------	--------------	------------



På det påbegyndte tælletræ ses det, at for hver af de 5 muligheder for 1. pladsen vil der være 4 muligheder for 2. pladsen. For hver af dem er der 3 muligheder for 3. pladsen osv. Der vil derfor være $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ forskellige måder at stille fem mennesker op på række på.



2 Eksempel

Kufferthængelåsen har 3 hjul med 10 tal i hvert. Hvor mange muligheder er der for at indstille en kode? Vi kan angribe opgaven som før. Fra venstre mod højre er der 3 pladser hver med 10 muligheder.

10 muligheder	10 muligheder	10 muligheder
---------------	---------------	---------------

For hver af mulighederne på det første hjul er der 10 muligheder for det næste, og for hver af dem er der 10 muligheder for det sidste. Dermed er der $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$ muligheder for at indstille en kode.

3 Multiplikationsprincippet "både og"

Hvis man **både** skal vælge blandt n muligheder **og** blandt m muligheder, er der i alt $n \cdot m$ muligheder.

4 Eksempel

På hvor mange måder kan kuffertlåsen indstilles, hvis et tal kun må optræde i koden én gang?

Fra venstre mod højre er der 3 pladser, men kun på første plads kan vi vælge blandt alle 10 tal. Herefter er der kun 9 muligheder og til sidst 8 muligheder.

10 muligheder	9 muligheder	8 muligheder
---------------	--------------	--------------

I alt er der altså $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ muligheder.

5 Eksempel

En nummerplade i Danmark består normalt af 2 bogstaver (ikke æ, ø el. å) og 5 tal. Hvor mange forskellige nummerplader kan der laves på den måde? Fra venstre mod højre på pladen har vi:

25 mulige	25 mulige	10 mulige	10 mulige	10 mulige	10 mulige	10 mulige
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

Dermed er det i alt muligt at lave $25 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 25^2 \cdot 10^5 = 62\,500\,000$ forskellige standardnummerplader.

6 Additionsprincippet "enten eller"

Hvis man **enten** har et valg med m muligheder **eller** et andet valg med n muligheder, så har man i alt $m + n$ muligheder.

7 Eksempel

På en restaurant er der 4 forretter og 3 desserter. Du vil enten have en forret eller en dessert. I alt har du altså $4 + 3$ muligheder.

8 Øvelse

På et menukort er der 2 forretter, 4 hovedretter og 4 desserter.

- Beregn, hvor mange valgmuligheder der er, hvis kun en enkelt ret må vælges.
- Beregn, hvor mange valgmuligheder der er, hvis der skal vælges både en forret, en hovedret og en dessert.

9 Øvelse

En kodelås har fire hjul, der hver har 10 tal. Bestem antal muligheder for at indstille en kode:

- Når alle 10 tal må bruges på alle pladserne.
- Når der ikke må stå 0 på første plads.
- Når de fire tal skal være forskellige.

10 Øvelse

- Bestem det antal måder bogstaverne A B C D kan stilles i rækkefølge på.
- Opskriv alle måderne.

11 Øvelse

I Monaco består nogle af nummerpladerne af et bogstav og 3 cifre, hvor bogstavet står først.

- Bestem det maksimale antal forskellige nummerplader der kan laves.
- Bestem, hvor mange nummerplader der ville kunne laves, hvis der tilføjes et ekstra ciffer.
- Bestem, hvor mange nummerplader der ville kunne laves, hvis der tilføjes et ekstra bogstav.



4.2 Permutationer

12 Introduktion

I hestevæddeløb kan man spille på, hvem der bliver nr. 1, 2 og 3 blandt de deltagende heste. Der vil være en rimelig chance for at gætte rigtigt, hvis der kun deltager 3 heste i løbet. Hvis vi starter med førstepladsen har vi:

3 muligheder for guld 2 muligheder for sølv 1 mulighed for bronze

Alt i alt er der $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ mulige rækkefølger.

13 Definition

Et antal elementer opstillet i en bestemt rækkefølge kaldes en **permutation**.

Der var altså $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ mulige permutationer i hestevæddeløbet.

På samme måde som 10^3 er en smart måde at skrive og udregne $10 \cdot 10 \cdot 10$, er der en smart måde at skrive og regne for eksempel $3 \cdot 2 \cdot 1$.

14 Definition

Produktet af de første n tal i talrækken kaldes **n -fakultet**:

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ og vi fastsætter, at $0! = 1$

15 Eksempel

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$

16* Sætning

Antallet af forskellige rækkefølger (permutationer), som kan dannes af n elementer, er $n!$

17 Eksempel

I et løb med 3 deltagere er der $3! = 6$ permutationer, altså 6 muligheder for at danne nr. 1, 2 og 3.

Otte personer kan stilles i rækkefølge på $8! = 40320$ måder.

18 Eksempel

Vi skal nu se på det tilfælde, hvor det kun er nogle af pladserne, der skal stilles i rækkefølge.

Vi vender tilbage til hestevæddeløbet, hvor vi nu antager, at der er 7 deltagende heste.

Hvor mange muligheder er der nu for at besætte de tre første pladser?

Førstepladsen kan vælges blandt syv heste, herefter er der kun seks heste at vælge imellem til andenpladsen og herefter fem heste til tredjepladsen.

7 muligheder 6 muligheder 5 muligheder

Ifølge multiplikationsprincippet er det samlede antal muligheder $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

I CAS bruges kommandoen nPr til at udregne antallet af permutationer, der kan dannes af r elementer, som vælges ud af n elementer.

Med tallene fra vores eksempel, hvor $r = 3$ og $n = 7$, indtastes $nPr(7,3)$.

CAS	
1	$nPr(7,3)$
→	210

Det tal, kommandoen nPr udregner, kan også beregnes med følgende formel.

19* Sætning

Antallet af forskellige rækkefølger (permutationer), som kan dannes, når r elementer vælges ud af en større samling på n elementer, er givet ved: $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

20 Eksempel

Vi beregner igen antallet af måder, som de tre første heste kan arrangeres på, blandt 7 deltagende heste. Med formelen fra ovenstående sætning får vi: $P(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 210$

21 Eksempel

Ud af en stabel på 12 bøger skal 5 stilles op på en hylde i rækkefølge.

Vi beregner antal måder, hvorpå det kan gøres, ved hjælp af formelen fra sætning 19 og indsætter $n = 12$ og $r = 5$: $P(12,5) = \frac{12!}{(12-5)!} = \frac{12!}{7!} = 95040$

22 Øvelse

- Bestem det antal måder, 9 personer kan stille sig i rækkefølge på.
- Bestem det antal permutationer, der kan dannes af 4 forskellige figurer på en hylde.

23 Øvelse

En tryllekunstner har en æske med fire pladser i rækkefølge til fire kugler med farverne gul, rød, grøn og blå. Publikum lægger kuglerne tilfældigt i æsken og lukker låget. Tryllekunstneren fortæller nu uden at åbne æsken, hvordan kuglerne ligger i den.

- På hvor mange forskellige måder kan kuglerne lægges i rækkefølge i æsken?

24 Øvelse

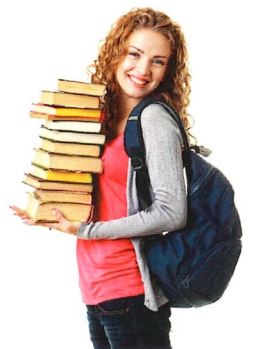
På en boghylde er der plads til 6 bøger.

- Beregn antallet af forskellige rækkefølger man kan stille de 6 bøger op i, hvis man har 10 bøger at vælge fra.

25 Øvelse

I en klasse med 24 elever skal der vælges 3 elever. Den første, der vælges, bliver bestyrer af klassekassen, den anden, der vælges, skal være elevrådsrepræsentant og den sidste skal holde et indlæg på næste morgensamling på vegne af hele klassen.

- På hvor mange måder kan de tre vælges?



4.3 Kombination og binomialkoefficient

26 Introduktion

Du har kun tid til 5 ture ud af dine 15 yndlingsture i Tivoli. Du er ligeglad med rækkefølgen af turene. På hvor mange måder kan du vælge de 5 ture?

Sådanne spørgsmål skal vi studere nærmere på disse sider.

Indtil videre har vi talt antal måder, hvorpå man kan sætte r elementer valgt blandt n elementer i rækkefølge. Problemstillingen ovenfor er anderledes. Her skal vi bestemme det antal måder, der kan udvælges r elementer blandt n elementer.

27 Definition

Et antal elementer udvalgt (uden rækkefølge) af en samling elementer kaldes en **kombination**.

28* Sætning

Antallet af forskellige udvalg (kombinationer), som kan dannes, når r elementer vælges ud af en større samling på n elementer er givet ved: $K(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{P(n, r)}{r!}$.

29 Eksempel

En klasse kommer hjem fra en studietur med 48 vellykkede fotos. Heraf skal 4 fotos udvælges til brug på skolens hjemmeside.

Det kan gøres på i alt: $K(48, 4) = \frac{48!}{44!4!} = 194580$ måder.

30 Eksempel

5 ture ud af 15 kan vælges på $K(15, 5)$ måder. $K(15, 5) = \frac{15!}{10!5!} = 3003$.

31 Eksempel

På en burgerrestaurant vælger kunden selv 4 typer grøntsager blandt 9 forskellige.

Hvor mange forskellige burgere kan man lave?

Uden hensyn til rækkefølgen er svaret $K(9, 4) = 126$.

Hvis vi tager hensyn til rækkefølgen, som grøntsagerne puttes i burgeren i, må der være flere. Svaret er $P(9, 4) = 3024$.

I CAS udregnes $K(9, 4)$ og $P(9, 4)$ med kommandoerne $nCr(9, 4)$ og $nPr(9, 4)$.

32 Eksempel

En mand har 5 slips i farverne sort, blå, rød, gul, grøn og pakker to af dem ned i en kuffert en sen aften i dårlig belysning. Hvor mange mulige måder kan slipsene være pakket på?

$K(5, 2) = 10$. Altså er der 10 mulige farvekombinationer af slipsene.

33 Definition

Antallet af kombinationer $K(n, r)$ skrives også $\binom{n}{r}$ og kaldes en **binomialkoefficient**.

34 Eksempel

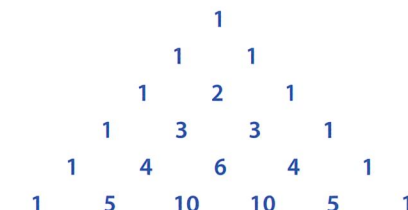
På hvor mange måder kan man vælge 2 elever blandt 4? Svar: $\binom{4}{2} = K(4, 2) = 6$, altså på 6 måder.

35 Pascals trekant

I Pascals trekant er **tallene inde i trekanten lig med summen af de to tal, der står ovenover**.

Når tallene sættes op på denne måde, kan hvert tal regnes ud som en binomialkoefficient. Vi lader rækkernes nummerering starte med 0 og finder eksempelvis 6-tallet i 4. række. Det er tal nummer 2 fra venstre, hvis vi igen starter med at tælle første tal som nummer 0.

Og 6 er jo netop $K(4, 2)$. Tilsvarende ser vi, at $K(5, 2) = 10$, idet 5. rækkes 2. tal er 10, og vi kan se, at det også må gælde, at $K(5, 3) = 10$.



36 Øvelse

a. På hvor mange måder kan man udvælge 8 fotos fra en samling på 48?

37 Øvelse

a. Tegn Pascals trekant, idet du tilføjer endnu en række.
b. Brug din trekant til at beregne binomialkoefficienten $\binom{6}{3}$.

38 Øvelse

En mand har 7 T-shirts, men har kun plads til 2 i håndbagagen.

a. På hvor mange måder kan man udvælge de 2 T-shirts blandt de 7 mulige? (Uden at tænke på rækkefølgen).



39 Øvelse

Du er på tapasrestaurant og skal vælge 5 retter ud af menukortets 16 retter.

På hvor mange måder kan du gøre dette, når:

a. Du er ligeglad med rækkefølgen af retterne?
b. Rækkefølgen betyder noget?

40 Øvelse

Til en eksamen skal man besvare to spørgsmål, som trækkes tilfældigt blandt 10 spørgsmål ialt.

a. På hvor mange måder kan man trække 2 spørgsmål blandt 10?



4.4 Sandsynlighedsregning

41 Introduktion

Sandsynlighedsregning er den matematiske måde at håndtere tilfældige eksperimenter på.

Hvis en terning er ærlig, er der lige stor chance for, at den lander på hver af de 6 sider.

Sandsynligheden for, at den lander på hændelsen "4 øjne", er derfor én ud af seks, altså $\frac{1}{6} \approx 0,167$. Symbolsk skriver vi dette således: $P(4) = \frac{1}{6}$

Hvis vi kastede uendeligt mange gange med terningen, ville den lande på "4 øjne" en sjettedel af gangene.

42 Definition

Sandsynligheden for en given hændelse, skal forstås som frekvensen for hændelsen ved en uendelig række gentagelser af forsøget.

I nogle tilfælde kan man udtænke, hvad sandsynligheden for en given hændelse er uden at foretage et eksperiment. Det gjorde vi i eksemplet med terningen. Dette kaldes teoretisk sandsynlighed eller *a priori* (på forhånd) sandsynlighed.

I andre tilfælde må vi foretage et eksperiment for at bestemme sandsynligheden. Måske har vi mistanke om, at en terning er uærlig. Vi kan i så fald bestemme sandsynligheden for at få 4 øjne ved at foretage et meget stort antal kast med terningen og så udregne frekvensen af observationen 4. Jo flere kast, jo bedre. Dette kaldes frekvensbaseret sandsynlighed.

43 Sandsynligheden for en bestemt hændelse kan bestemmes på to måder

- **A priori:** Ved hjælp af tællemetoder regner man sig frem til, hvad frekvensen vil være med uendeligt mange gentagelser.
- **Frekvensbaseret:** Man gennemfører et eksperiment mange gange og udregner frekvensen af hændelsen.

44 Eksempel

Hvad er sandsynligheden for hændelsen "en tegnestift lander med spidsen opad"? Vi kan ikke udtænke dette på forhånd og vil derfor bruge *frekvensbaseret* sandsynlighed. Vi kaster eksempelvis 1000 tegnestifter på et bord, 230 af dem lander med spidsen opad. Den frekvensbaserede sandsynlighed er med tilnærmelse:

$$P(\text{opad}) = \frac{230}{1000} = 0,23 = 23\%$$



45 Eksempel

Hvad er sandsynligheden for hændelsen "at trække spar 2" fra et spil kort uden jokere? Denne sandsynlighed kan bestemmes *a priori* dvs. uden at foretage et eksperiment. Vi argumenterer således:

Der er 52 kort hver med lige stor chance for at blive trukket, så sandsynligheden for at få kortet spar 2 er $P(\text{spar 2}) = \frac{1}{52} \approx 0,019$

Altså er der 1,9% chance for at trække en spar 2.

Hvis vi lægger 3 jokere ind i kortbunken, vil sandsynligheden for at trække spar 2 falde til $P(\text{spar 2}) = \frac{1}{55} \approx 0,018$.



46 Eksempel

Vi trækker et kort fra et spil kort. Der er 13 kort i hver farve, så sandsynligheden for at vi trækker en spar er $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$. Dette er også et eksempel på *a priori* bestemt sandsynlighed.

Man kunne også argumentere for resultatet således; der er 4 farver med lige mange kort, så derfor er sandsynligheden for at få en spar lig med en ud af fire.

47 Eksempel

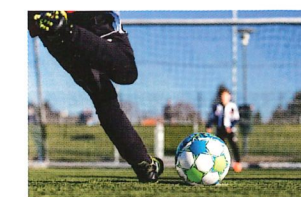
En fodboldspiller har i løbet af sin karriere scoret 63 gange ud af 88 straffespark.

Hvad er sandsynligheden for, at han scorer i næste spark?

Vi bruger de data, vi har, og udregner $P(\text{scorer}) = \frac{63}{88} \approx 0,716$

Selvom vi ikke selv foretager et eksperiment, er dette *frekvensbaseret* sandsynlighed.

Vi bruger nemlig data fra nogle virkelige erfaringer.



48 Øvelse

Du har fået disse kort på hånden, men din modspiller har lov til at trække et.

Bestem sandsynligheden for, at hun trækker:

- En spar?
- En ruder?
- En 5'er?
- En 8'er?
- Er dine svar bestemt *a priori* eller frekvensbaseret?



49 Øvelse

Nogle elever kaster en skæv mønt. Efter 100 kast er 59 landet på krone. Efter 1000 kast er 611 landet på krone, og efter 10000 kast er 6104 landet på krone.

- Bestem på baggrund af forsøgene sandsynligheden for, at den pågældende mønt lander på krone.
- Er sandsynligheden bestemt *a priori* eller frekvensbaseret?
- Bestem sandsynligheden for, at den lander på plat næste gang, de kaster mønten.



4.5 Sandsynlighedsfelt

50 Introduktion

Den russiske matematiker Andrei Kolmogorov (1903-1987) har indført nogle retningslinjer for, hvordan en teori om sandsynlighed kan stilles op. Her vil vi bruge forsimplede, men tilsvarende, retningslinjer til at lave en model for at kunne regne på tilfældige eksperimenter. Vi vil koncentrere os om eksperimenter, hvor der er et endeligt antal udfald.

51 Matematisk sandsynlighedsfelt

En matematisk model af et eksperiment med tilfældigt udfald, der opfylder det nedenstående, kaldes et **sandsynlighedsfelt**:

1. En afgrænsning og navngivning af de mulige udfald u i udfaldsrummet U .
2. En sandsynlighed p for hvert af disse udfald i U .
3. Sandsynligheden for et udfald $P(u)$ er et tal, hvorom der gælder, at: $0 \leq P(u) \leq 1$, og summen af sandsynlighederne for alle udfaldene i U er 1.



52 Eksempel

Du får tildelt 4 kort. Din modspiller skal trække et tilfældigt kort. Vi har nu et sandsynlighedsfelt:

1. Udfaldsrummet er: $U = \{\text{ruder 5, spar 4, spar bonde, hjerter es}\}$
2. $P(\text{ruder 5}) = 0,25$, $P(\text{spar 4}) = 0,25$, $P(\text{ruder bonde}) = 0,25$, $P(\text{hjerter es}) = 0,25$
3. Hver sandsynlighed er større end eller lig med 0 og mindre end eller lig med 1 (nemlig 0,25). Og summen af sandsynlighederne giver 1.

53 Definition

En **hændelse** H er et eller flere udfald fra udfaldsrummet U . Disse udfald kaldes **gunstige**. De andre udfald, der ikke er med i H , kaldes den **komplementære** hændelse til H , og skrives H' . Sandsynligheden for en hændelse $P(H)$ er summen af sandsynlighederne for de udfald, der er med i hændelsen.

Den **sikre** hændelse har sandsynligheden 1, og den **umulige** hændelse har sandsynligheden 0.

54* Sætning

Sandsynligheden for den komplementære hændelse er:

$$P(H') = 1 - P(H).$$

55 Eksempel

Der kastes med en terning. Sandsynligheden for ikke at få en 4'er er

$$P(\text{ikke 4'er}) = 1 - P(4'er) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Der trækkes et kort fra en bunke med 52 kort. Sandsynligheden for ikke at få Hjerter Es er

$$P(\text{ikke Hjerter Es}) = 1 - P(\text{Hjerter Es}) = 1 - \frac{1}{52} = \frac{51}{52}$$

56* Symmetrisk sandsynlighedsfelt

Hvis alle udfaldene i U har lige stor sandsynlighed, siger man, at sandsynlighedsfeltet er symmetrisk. I et symmetrisk sandsynlighedsfelt kan sandsynligheden for en hændelse H beregnes ved

$$P(\text{ulige}) = \frac{\text{antal gunstige udfald}}{\text{antal mulige udfald}}$$

57 Eksempel

Hvis vi kaster med en fair terning, er sandsynlighedsfeltet symmetrisk, da alle udfald har sandsynligheden $\frac{1}{6}$.

Sandsynligheden for at få hændelsen "et ulige tal" (gunstige udfald er 1, 3, 5) er:

$$P(\text{ulige}) = \frac{\text{antal gunstige udfald}}{\text{antal mulige udfald}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Hvis terningen havde været skæv, havde sandsynlighedsfeltet ikke været symmetrisk. I så tilfælde kan vi ikke bestemme sandsynligheden a priori. Så var vi nødt til at bestemme sandsynligheden frekventielt.

58 Eksempel

Ved kast med to terninger kan man benytte en symmetrisk sandsynlighedsmodel, hvis man opstiller udfaldene i en "kombimatrix" med de 36 mulige udfald (kombinationerne af de to terningers visning). I tabellen har vi sat $\sqrt$ ved de udfald, der svarer til at summen af terningernes øjne er 4. Der er tre af de udfald. Nu kan vi bestemme sandsynligheden for, at terningernes sum er 4:

$$P(\text{øjensum er 4}) = \frac{3}{36} = 0,083$$

		Terning B					
		1	2	3	4	5	6
Terning A	1			$\sqrt$			
	2		$\sqrt$				
	3	$\sqrt$					
	4						
	5						
	6						

59 Øvelse

En mønt flippes, og det registreres, om det blev plat eller krone.

- a. Gør rede for, at det er et sandsynlighedsfelt ved at følge fremgangsmåden i definition 51 og eksempel 52.
- b. Gør derudover rede for, om det er symmetrisk eller ej.

60 Øvelse

Der trækkes et tilfældigt kort fra en bunke med 52 kort. Bestem sandsynligheden for at få:

- a. en 7'er.
- b. en spar.
- c. ikke en spar.
- d. et billedkort.
- e. ikke et billedkort.

61 Øvelse

Der kastes to terninger – en rød og en grøn.

- a. Tegn en kombimatrix, der viser de mulige udfald.
- b. Sæt hak ved de udfald, der indgår i hændelsen "øjensummen er 6".
- c. Bestem sandsynligheden for at få øjensummen 6.





4.6 Multiplikations- og additionsprincippet

62 Introduktion

Kompleksiteten stiger meget hurtigt, når man har at gøre med sandsynlighedsregning. Når der er tale om flere hændelser, kan man få bedre overblik ved at bruge forskellige metoder og regneprincipper, som fx chancetræet og "både og"- og "enten eller"-principperne, som vi skal se nærmere på her.

63 Multiplikationsprincippet ved "både og"-sandsynligheder

Hvis en hændelse består i, at **flere uafhængige hændelser skal ske efter hinanden**, så findes sandsynligheden for den samlede hændelse ved at **multiplificere sandsynlighederne** for de enkelte hændelser.

64 Eksempel

I en krukke ligger 2 røde og 3 grønne bolde. Sandsynlighederne for tilfældigt at trække en rød og grøn bold er:

$$P(\text{rød}) = \frac{\text{antal gunstige udfald}}{\text{antal mulige udfald}} = \frac{2}{5} \quad \text{og} \quad P(\text{grøn}) = \frac{\text{antal gunstige udfald}}{\text{antal mulige udfald}} = \frac{3}{5}$$

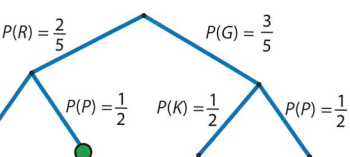
Samtidigt flippes en mønt, hvor

$$P(\text{Plat}) = \frac{\text{antal gunstige udfald}}{\text{antal mulige udfald}} = \frac{1}{2} \quad \text{og} \quad P(\text{Krone}) = \frac{\text{antal gunstige udfald}}{\text{antal mulige udfald}} = \frac{1}{2}$$

Vi vil nu betragte det sammensatte eksperiment "der trækkes en bold og flippes en mønt". Og vi vil bestemme sandsynligheden for at trække en rød bold og få plat: $P(\text{Rød og Plat})$.

Vi kan tegne et såkaldt chancetræ for at få beskrevet udfaldsrummet.

Da vi både skal have en rød bold og plat, multipliceres sandsynlighederne $P(\text{Rød og Plat}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$



65 Eksempel

I et eksperiment kastes en terning 3 gange. Vi vil beregne sandsynligheden for at få et lige antal øjne i alle tre kast.

I hændelsen "lige antal øjne" er udfaldene 2, 4 og 6, dvs.:

$$P(\text{Lige}) = \frac{\text{antal gunstige udfald}}{\text{antal mulige udfald}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

De tre kast er uafhængige af hinanden, så vi bruger "både og"-princippet og får:

$$P(\text{LigeLigeLige}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

I "både og"-situationen ovenfor skal flere hændelser indtræffe. Her antages det, at de enkelte hændelser er uafhængige af hinanden.

I andre situationer skal man regne på, at der i ét eksperiment enten kan ske den ene hændelse eller den anden hændelse fra en samling af hændelser.

66 Additionsprincippet ved "enten eller"-sandsynligheder

Hvis en hændelse består i, at der **enten indtræffer en bestemt hændelse eller en anden bestemt hændelse**, så **adderes sandsynlighederne**, hvis der ikke er overlap mellem hændelserne.

67 Eksempel

En person har 5 forskellige t-shirts i farverne blå, rød, grøn, gul og hvid. Med bind for øjnene skal han tage en tilfældig t-shirt. Hvis de ligger uordnet, har vi fx $P(\text{han tager en rød}) = 0,2$. Hvad er sandsynligheden for, at han med bind for øjnene vælger en gul eller en blå eller en rød?

Her er der tale om en "enten eller"-situation uden overlap (den samme t-shirt kan ikke have flere farver), så vi adderer sandsynlighederne:

$$P(\text{tager en gul}) + P(\text{tager en blå}) + P(\text{tager en rød}) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} = 0,6$$

68 Eksempel

Fra et normalt sæt spillekort uden jokere trækkes et kort. Vi vil bestemme sandsynligheden for at trække enten en spar eller en hjerter.

$$P(\text{Spar}) = \frac{\text{antal gunstige udfald}}{\text{antal mulige udfald}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \quad \text{og} \quad P(\text{Hjerter}) = \frac{\text{antal gunstige udfald}}{\text{antal mulige udfald}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

Der er ikke overlap mellem hændelserne, da det samme kort ikke både kan være en spar og en hjerter. Vi adderer derfor sandsynlighederne: $P(\text{Spar}) + P(\text{Hjerter}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

69 Øvelse

Et eksperiment består i et kast med en terning og at flippe en mønt.

- Bestem sandsynligheden for at få plat og 5.
- Tegn et chancetræ over situationen.

70 Øvelse

Et eksperiment består i et træk fra et spil kort uden jokere.

- Bestem sandsynligheden for enten at trække en klør eller en ruder.
- Bestem sandsynligheden for enten at trække et billedkort eller en 4'er.

71 Øvelse

Et eksperiment består i tre kast med en terning.

- Bestem sandsynligheden for at slå en 6'er i alle tre kast, $P(6-6-6)$.
- Bestem sandsynligheden for først at slå et lige antal øjne og så to 6'ere $P(L-6-6)$.

72 Øvelse

På et valghold er 12 elever 16 år, 5 elever er 17 år og 3 elever 18 år. De skal arbejde sammen i par. Hvad er sandsynligheden for, at der i et par er:

- Enten en 17 årig eller en 18 årig?
- En 16 årig, en 17 årig eller en 18 årig?

4.7 Ræsonnementer og beviser – kombinatorik

73 Introduktion

Bevisførelse handler om at fremlægge et ræsonnement, der overbeviser nogen (evt. en selv) om en påstands rigtighed. I matematikken er en påstand typisk en sætning.

Et ræsonnement er, når man argumenterer fornuftigt for sammenhængen mellem nogle præmisser og nogle konklusioner. En præmis kan fx være en definition af de symboler og begreber man bruger. Og konklusionen skulle gerne pege på, at sætningen er sand.

Vi skal her se nogle ræsonnementer for nogle af de sætninger, vi har brugt undervejs i kapitlet.

[16 Sætning]

Antallet af forskellige rækkefølger (permutationer), som kan dannes af n elementer er $n!$

74 Bevis for sætning 16

Der kan vælges blandt n elementer på første plads.

Til den næste plads er der et element mindre at vælge imellem (vi har jo brugt et til den første plads).

Vi benytter "både-og" princippet, da vi jo skal besætte både den første plads, og den anden plads og så videre indtil den n 'te plads. Vi multiplicerer valgmulighederne for hver plads og får: $P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

[19 Sætning]

Antallet af forskellige rækkefølger (permutationer), som kan dannes, når r elementer vælges ud af en større samling af n elementer, er givet ved: $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

75 Bevis for sætning 19

Antallet af rækkefølger, hvor alle n elementer vælges ud af en samling af n elementer, er $P(n) = n!$

Men vi interesserer os kun for rækkefølgerne af de første r elementer, så vi skal have divideret med det antal rækkefølger, de sidste $(n-r)$ elementer kan danne tilsammen.

De sidste $(n-r)$ elementer kan danne $(n-r)!$ rækkefølger, så vores formel bliver:

$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$. Dette var, hvad vi skulle vise.

[28 Sætning]

Antallet af forskellige udvalg (kombinationer), som kan dannes, når r elementer vælges ud af en større samling af n elementer, er givet ved: $K(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

76 Bevis for sætning 28

Antallet af forskellige rækkefølger (permutationer), som kan dannes, når r elementer vælges ud af en større samling af n elementer, er givet ved: $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

Når vi kun interesserer os for udvalget (kombinationen) og ikke rækkefølgen, så skal vi have divideret med antallet af rækkefølger man kan få af de valgte r elementer, altså $r!$.

Derfor er der $r!$ gange færre kombinationer end permutationer:

$K(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$. Dette var, hvad vi skulle vise.

[54 Sætning]

Sandsynligheden for den komplementære hændelse er:

$$P(H') = 1 - P(H).$$

77 Bevis for sætning 54

Sandsynligheden for den sikre hændelse med alle udfald må være 1 eller 100 %. En hændelse og dens komplementære hændelse udgør tilsammen alle udfald, derfor er $P(H) + P(H') = 1$. Vi trækker $P(H)$ fra på begge sider og får $P(H') = 1 - P(H)$. Dette var, hvad vi skulle vise.

[56 Sætning]

Hvis alle udfaldene i U har lige stor sandsynlighed, siger man, at sandsynlighedsfeltet er **symmetrisk**. I et symmetrisk sandsynlighedsfelt kan sandsynligheden for en hændelse H beregnes ved

$$P(H) = \frac{\text{antal gunstige udfald}}{\text{antal mulige udfald}}$$

78 Bevis for sætning 56

Vi ser på en sandsynlighedsmodel, der har n udfald hver med sandsynligheden $P(u) = \frac{1}{n}$. Sandsynligheden for en hændelse er summen af sandsynlighederne for de udfald, der er med i hændelsen. Derfor får vi $P(H) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}$ i alt lige så mange led som der er udfald i hændelsen.

Dvs. $P(H) = \frac{1}{n} \cdot (\text{antal af udfald i hændelsen})$.

Da n er antallet af alle udfald, får vi derfor: $P(H) = \frac{\text{antal udfald i hændelsen } H}{\text{antallet af alle udfald}}$

Dette var, hvad vi skulle vise.

79 Øvelse

Ræsonnementer af denne her art er indviklede. Man skal holde mange komplicerede bolde i luften. En god måde at starte arbejdet med at forstå ræsonnementerne på, er simpelthen at skrive det hele ned.

a. Skriv sætningerne og beviserne ned med egne ord.



Opgave 401

Bestem det antal måder, som eleverne Line, Ole, Jesper og Katrine kan stille sig op i rækkefølge på.

Opgave 402

Land har alfabetet 25 bogstaver, og alle bilnummerplader består af to bogstaver og tre tal, hvor bogstaverne står først.

Bestem det maksimale antal forskellige nummerplader, der kan laves.

Bestem, hvor mange nummerplader der kan laves med to bogstaver og fire tal.

Bestem, hvor mange nummerplader der kan laves med tre bogstaver og tre tal.

Opgave 403



En gammel cykellås har 6 små pinde, der har 3 stillinger: De kan skubbes ind, hives ud eller blive stående i midterpositionen. Bestem antal muligheder der er for at indstille en kode:

Når alle tre indstillinger må bruges på alle pladserne.

Når den første pind skal være trukket ud.

Når ingen må stå i midten.

Opgave 404

En hylde står 2 matematikbøger, 4 danskbøger og 3 religionsbøger. En elev skal vælge 3 bøger – fra hvert fag.

På hvor mange måder kan det gøres?

Opgave 405

Øger skal stilles i orden på en reol.

På hvor mange måder kan de stilles i rækkefølge?

Opgave 406

På et bord står tre kasser, en med to forskellige kugler, en med 5 forskellige terninger og en med 3 forskellige pyramider. Vi skal vælge en kugle, en terning og en pyramide, som hver især stilles på en valgt plads for kugler, bolde og pyramider.

a. På hvor mange forskellige måder kan de tre pladser besættes?

Opgave 407

I et almindeligt spil kort med 52 kort er der 13 kort i hver farve. Fra sådan et sæt kort trækkes 2 kort, uden at der lægges tilbage.

a. På hvor mange måder kan de to kort trækkes, når man også regner med nummerorden, så fx "klør 5 og så spar 10" regnes forskelligt fra "spar 10 og klør 5"?

Opgave 408

En mand slår plat og krone tre gange i træk.

a. Hvor mange forskellige muligheder er der for forløbet, når man også holder regnskab med pladserne plat og krone kommer på?

Opgave 409

Pladserne i en bus er nummererede og en ekskursion på 32 studerende skal med bussen.

a. På hvor mange måder kan pladserne besættes?

Opgave 410



En signallampe har 5 lamper, der kan tændes og slukkes.

a. Hvor mange forskellige signaler kan lampen vise, når 5 slukkede lamper ikke regnes med som signal?

Opgave 411

En mand har 7 skjorter, 3 par bukser og 4 par sko.

a. På hvor mange måder kan han kombinere sit tøj?

Opgave 412

En kvinde har 4 bluser, 3 nederdele, 6 par strømpebukser og 4 par sko.

a. På hvor mange måder kan hun kombinere sit tøj?

Opgave 413

På et menukort er der 3 forretter, 5 hovedretter og 2 desserter.

a. Beregn, hvor mange valgmuligheder der er, hvis kun en enkelt ret må vælges.
b. Beregn, hvor mange valgmuligheder der er, hvis der skal vælges både en forret, en hovedret og en dessert.

Opgave 414

Beregn

- 9!
- 12!
- $\frac{6!}{5!}$
- $\frac{7!}{5!}$

Opgave 415

a. Udregn $8!$ og $6!$ gange $2!$, er de to tal lige store?

Opgave 416

5 lærere løber sækkeløb til en idrætsdag.

a. På hvor mange måder kan deres placeringer ske?

Opgave 417

12 gæster til en fest med buffet står i kø for at få mad.

a. På hvor mange måder kan køen dannes?

Opgave 418

Pladserne i en bus er nummererede og en ekskursion på 32 studerende skal med bussen.

a. På hvor mange måder kan de første 5 pladser besættes?

Opgave 419



En tryllekunstner har en æske med plads til tre kugler på en række. Han tager bind for øjenene, mens en fra publikum lægger en kugle ned på hver plads. De tre kugler vælges tilfældigt blandt en: sort, hvid, rød, blå, gul, brun og en grøn. Tryllekunstneren fortæller nu uden at åbne æsken, hvordan kuglerne ligger i den.

a. På hvor mange forskellige måder kan kuglerne lægges i rækkefølge i æsken?
b. På hvor mange forskellige måder kan man lægge en sort, en gul og en rød kugle i rækkefølge i æsken?

Opgave 420

På en boghylde er der plads til 10 bøger.

a. Beregn antallet forskellige rækkefølger, man kan stille de 10 bøger op i, hvis man har 15 bøger at vælge imellem.

Opgave 421

7 elever blandt 25 i en klasse skal udtages til et håndboldhold.

a. På hvor mange forskellige måder kan holdet dannes, når man lægger vægt på pladsen på holdet: målmand, back osv.?

Opgave 422

a. På hvor mange måder kan man udvælge 6 par sokker fra en samling på 32 par sokker, når der ikke skal tages hensyn til rækkefølgen?

Opgave 423

a. Beregn antallet af måder, man kan vælge 5 kort ud af et spil på 52 kort, sådan at der både er netop to hjerter og netop tre klør blandt de fem kort.

Opgave 424

En roklub har 20 medlemmer. Bestem antallet af måder, man kan udtage et hold til en 4 mandsbåd uden styrmand, når der ikke skal tages hensyn til rækkefølgen.

Opgave 425

En juleaften skal 16 familiemedlemmer spise sammen, men der er kun 12 pladser ved det store bord og 4 må sidde for sig selv ved et mindre bord. På hvor mange måder kan familien deles mellem de to borde?

Opgave 426

En populær parkeringsplads i en lille by har 5 pladser. Til et sportsstævne kommer familier i 50 biler. På hvor mange måder kan man udvælge de 5 biler, der får lov at holde på de 5 populære pladser?

Opgave 427

En billedramme har plads til 6 fotos. Rammen skal udfyldes med billeder fra et bryllup, der er 45 billeder at vælge imellem. Hvor mange mulige udvalg kan komme på tale?

Opgave 428

De tal i Pascals trekant er et tal lig med summen af de to tal, der står ovenfor tallet. Udfyld de næste 3 rækker af trekanten.

						1										
						1		1								
						1		2		1						
						1		3		3		1				
						1		4		6		4		1		
						1		5		10		10		5		1

Tallene i trekanten er binomialkoefficienter (hvor række nummeret starter øverst med nummer 0), og talnummeret i en række tælles fra venstre – igen startende med nummer 0. Brug trekanten til at udregne $K(7,3)$ og $K(8,5)$.

- c. Hvilken binomialkoefficient $\binom{n}{r}$ svarer til tallet på række 11 plads nummer 7 i Pascals trekant?
- d. Brug CAS til at finde ud af, hvilket tal der vil stå på den ovennævnte plads.

Opgave 429

			$K(0,0)$		
		$K(1,0)$		$K(1,1)$	
		$K(2,0)$		$K(2,1)$	
		$K(3,0)$		$K(3,1)$	
		$K(4,0)$		$K(4,1)$	
		$K(5,0)$		$K(5,1)$	
		$K(6,0)$		$K(6,1)$	

- På figuren ses Pascals trekant, hvori der er lavet fem fejl.
- a. Beskriv hver af de fem fejl, og angiv den rigtige binomialkoefficient.

Opgave 430

- Du er på restaurant og skal vælge 4 retter ud af menukortets 14 retter. På hvor mange måder kan du gøre dette når:
- a. du er ligeglad med rækkefølgen af retterne?
- b. rækkefølgen betyder noget?

Opgave 431

- Der skal trækkes et kort fra et spil kort uden jokere.
- a. Hvad er sandsynligheden for at trække en hjerter?
- b. Bestem sandsynligheden for at trække en 8'er.
- c. Bestem sandsynligheden for at trække et billedkort.

Opgave 432

- En fodboldspiller har i løbet af sin karriere scoret 30 gange ud af 50 straffespark.
- a. Bestem sandsynligheden for at han scorer i næste spark.

Opgave 433

- I almindelighed har omkring 5 procent af alle vine defekten "propsyge", som skyldes en skimmel-svamp i proppen. Denne propsyge ændrer smagen af vinen, så den smager lidt af sur karklud.
- a. Bestem sandsynligheden for, at en tilfældig indkøbt vin lider af propsyge.
- b. Vurder, hvordan de 5 procent er fremkommet – *a priori* eller *frekvensbaseret*?

Opgave 434

- Der går 28 elever i en 1. g klasse på et gymnasium. Heraf er 21 piger.
- Bestem sandsynligheden for, at en tilfældig udvalgt person er en:
- a. pige
- b. dreng

Opgave 435



- En person vil undersøge, hvad sandsynligheden er for, at skoen lander på sålen, hvis den kastes op i luften.
- Hun kaster 1000 gange og registrerer, at skoen landede på sålen 251 gange.
- a. Bestem sandsynligheden for, at den lander på sålen, næste gang hun kaster skoen.
- b. Bestem sandsynligheden for, at den ikke lander på sålen næste gang hun kaster.
- c. Er der tale om *a priori* eller *frekvensbaseret* sandsynlighed?

Opgave 436

- Nogle elever kaster en skæv mønt. Efter 100 kast er 33 landet på krone. Efter 1000 kast er 317 landet på krone, og efter 10000 kast er 3203 landet på krone.
- a. Bestem på baggrund af forsøgene sandsynligheden for, at den pågældende mønt lander på krone.
- b. Er sandsynligheden bestemt *a priori* eller *frekvensbaseret*?
- c. Bestem sandsynligheden for, at den lander på plat næste gang, han kaster mønten.

Opgave 437

- Der kastes en gang med en ærlig sekssidet terning. Bestem sandsynligheden for:
- a. at slå en 2'er.
- b. at slå enten 4, 5 eller 6.
- c. at slå 1 eller 2.

Opgave 438



- Der findes mange typer terninger. Bestem sandsynligheden for:
- a. at slå en 5'er med en 10-sidet terning.
- b. at slå en 11'er med en 12-sidet terning.
- c. at slå et øje-antal mindre end eller lig med 8 med en 10-sidet terning.
- d. at slå et lige antal øjne med en 8-sidet terning.
- e. at slå en 4'er med en 4-sidet terning.

Opgave 439

En bestemt 4-sidet terning skal bruges i et rollespil. I altagerne har dog mistanke om, at den er skæv. Hvordan kan det afgøres?
Er dit svar på delspørgsmål a. frekvensbaseret eller a priori?

Opgave 440

En roulette i et kasino kan kuglen lande med samme sandsynlighed på numrene 0 til 36. Hvor mange forskellige numre er der? Hvad er sandsynligheden for, at kuglen lander på 4?

Opgave 441

Et lotteri har 300 lodder, og gevinsten er en bil. 10 lodder sælges i byen, 100 lodder på landet og 20 lodder bliver slet ikke solgt. Til sidst udtrækkes gevinsten blandt alle numre. Hvad er sandsynligheden for, at gevinsten vindes af en, der har købt loddet i byen? Hvad er sandsynligheden for, at gevinsten bliver vundet?

Opgave 442

Et kort spil har 52 kort, hvoraf de fire er esser. Hvad er sandsynligheden for at trække et es, når du trækker et kort helt tilfældigt? Hvad er sandsynligheden for ikke at trække et es, når du trækker et kort helt tilfældigt?

Opgave 443

Du har fået disse 10 kort på hånden, men din modpart har lov at trække et. Skriv udfaldsrummet op, idet fx et kort som spar 2 skrives S2. Bestem $P(H7)$. Gør rede for, at vi har at gøre med et sandsynlighedsfelt. Bestem, hvor mange gunstige udfald der er i hændelsen "trækker en ruder". Bestem sandsynligheden for at trække en konge.



- f. Hvor mange udfald er der i hændelsen "modspilleren trækker et kort mindre end eller lig med 9"?
g. Er svaret i delspørgsmål b. og e. bestemt a priori eller frekvensbaseret?

Opgave 444

Der kastes med to terninger og udfaldene er opstillet i den følgende tabel.

		Terning B					
		1	2	3	4	5	6
Terning A	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

- a. Tegn tabellen af.
b. Marker hændelsen "summen er lig med 7" i tabellen.
c. Bestem sandsynligheden for hændelsen "summen er 7".
d. Bestem på tilsvarende vis sandsynligheden for hændelsen "summen er 8".
e. Bestem $P(\text{sum} = 9)$, $P(\text{sum} = 10)$, $P(\text{sum} = 11)$ og $P(\text{sum} = 12)$

Opgave 445

På et gymnasium og hf var der otte 1. års-klasser A, B, C, D, P, Q, X, Y. De fire første er sproglige studieretninger, de to midterste er hf-klasser og de to sidste er naturvidenskabelige klasser. Rektor trækker med bind for øjenene en klasse, der skal rydde op i kantinen resten af året. Bestem sandsynligheden for, at det bliver:

- a. En sproglig klasse
b. En hf-klasse
c. 1. X
d. En hf-klasse eller en naturvidenskabelig studieretning.

Opgave 446

En 8-sidet terning kastes en gang.

- a. Gør rede for, at vi har at gøre med et symmetrisk sandsynlighedsfelt.

Opgave 447

- a. Tag din ene sko af, og kast den op i luften. Registrer, om den lander på siden eller opret på sålen. Gentag eksperimentet nogle gange.
b. Opstil et frekvensbaseret sandsynlighedsfelt for eksperimentet.

Opgave 448

- I en skål ligger 20 glaskugler: 10 blå, 7 gule og 3 grønne. Med bind for øjnene trækker en person en kugle tilfældigt.
a. Hvad er sandsynligheden for, at det er en gul kugle, der trækkes?
b. Hvad er sandsynligheden for, at det er en blå eller grøn kugle, personen trækker?

Opgave 449

		Terning B			
		1	2	3	4
Terning A	1				
	2				
	3				
	4				

- Der kastes med to 4-sidede terninger og udfaldene er opstillet i en Kombimatrix.
a. Tegn tabellen af.
b. Marker hændelsen "summen er lig med 4" i tabellen.

- c. Bestem sandsynligheden for hændelsen "summen er 4".
d. Bestem på tilsvarende vis sandsynligheden for hændelsen "summen er 3".
e. Bestem $P(\text{sum} = 2)$, $P(\text{sum} = 5)$, $P(\text{sum} = 6)$, $P(\text{sum} = 7)$ og $P(\text{sum} = 8)$
f. Opstil et pindediagram, der viser, hvordan sandsynlighederne for summerne 2 til 8 er fordelt.

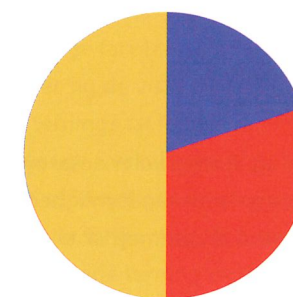
Opgave 450

- Bestem sandsynligheden for ved samtidigt kast med en rød og en blå terning at få:
a. samme øjental på begge terninger.
b. samme øjental på begge terninger og at terningernes øjental tilsammen er 10.

Opgave 451

- a. Bestem sandsynligheden for at få mere end 3 øjne, når man slår med en 6-sidet terning.
a. Bestem sandsynligheden for at få mere end 3 øjne, når man slår med en 20-sidet terning.

Opgave 452



- På lykkhjulet fylder det orange område 50 %, det blå 20 % og det røde 30 %.
a. Beskriv sandsynlighedsfeltet.
b. Gør rede for, om sandsynlighedsfeltet er symmetrisk.
c. Bestem sandsynligheden for at lykkhjulet ender på "blåt".

Opgave 453

En mand har 5 slips i farverne sort, blå, rød, gul, grøn og hvid, og pakker to af dem ned i en kuffert en sen aften i dårlig belysning.

Bestem sandsynligheden for, at han fik pakket et gult og et grønt.

Opgave 454

En person vil undersøge, hvad sandsynligheden er for, at skoen lander på sålen, hvis den kastes op i luften.

Han kaster 200 gange og registrerer, at skoen landede på sålen 30 gange.

Bestem sandsynligheden for, at den lander på sålen næste gang, han kaster skoen.

Bestem sandsynligheden for, at den ikke lander på sålen næste gang, han kaster.

Er der tale om a priori eller frekvensbaseret sandsynlighed?

Opgave 455



En terning kastes og vi registrerer antal øjne.

Gør rede for, at det er et sandsynlighedsfelt.

Gør rede for, at det er symmetrisk eller ej.

Opgave 456

Opstil en sandsynlighedsmodel for gevinsterne i en tombola, hvor der trækkes lod om præmier.

Der er 100 lodder i tombolaen, og de 94 er nitter (uden gevinst) og 3 med gevinster på 200 kr. og 2 med gevinster på 500 kr. og 1 med en gevinst på 1000 kr.

Opstil en tabel med de mulige gevinster og deres sandsynligheder.

Opgave 457

- Bestem sandsynligheden for ved samtidigt kast med en rød og en blå terning at få et ulige antal øjne på begge terninger.

Opgave 458

- Bestem sandsynligheden for ved samtidigt kast med en rød og en blå terning at få et samlet antal øjne mellem 3 og 7.

Opgave 459

Der ligger 4 kort med bagsiden opad – 3 hjerter og 1 spar.

- Bestem sandsynligheden for at få en hjerter, når der trækkes et tilfældigt kort.

I et eksperiment trækkes der nu 3 gange, og hver gang noteres, om det var hjerter eller spar, kortet lægges tilbage og der blandes rundt.

- Tegn et chancetræ, der viser de mulige udfald af de tre trækninger.
- Bestem $P(\text{tre spar})$.
- Bestem $P(\text{tre hjerter})$.
- Bestem $P(\text{to hjerter og en spar})$.
- Bestem $P(\text{to spar og en hjerter})$.

Opgave 460

Der ligger 5 kort med bagsiden opad; 2 ruder og 3 klør.

- Bestem sandsynligheden for at få en klør, når der trækkes et tilfældigt kort.

I et eksperiment trækkes der 3 gange, og hver gang noteres, om det var ruder eller klør, kortet lægges tilbage og der blandes rundt.

- Tegn et chancetræ, der viser de mulige udfald af de tre trækninger.
- Bestem $P(\text{tre ruder})$.
- Bestem $P(\text{ingen ruder})$.
- Bestem $P(\text{to ruder og en klør})$.
- Bestem $P(\text{to klør og en ruder})$.

Opgave 461

I en kasse ligger 36 Kinder-æg, og i 5 af dem er der en lille dragefigur, som er et samlereobjekt.

- Bestem sandsynligheden for, at du får en drage, når du får lov at vælge et æg tilfældigt?

Du trækker nu to æg:

- Tegn et chancetræ over de mulige udfald.
- Bestem sandsynligheden for, at du får to drager.
- Bestem sandsynligheden for, at du får en drage i det andet æg men ikke det første, når du får lov at vælge to æg tilfældigt.
- Bestem sandsynligheden for, at du trækker et uden en drage og et med en drage.

Opgave 462

I en kurv ligger 6 kugler – en blå og to sorte og tre gule. En kugle trækkes tilfældigt, farven noteres og den lægges tilbage og der røres rundt. Eksperimentet udføres 3 gange.

- Tegn et chancetræ, der viser de mulige udfald.
- Bestem $P(3 \text{ gule})$ og $P(3 \text{ blå})$.
- Bestem $P(2 \text{ blå og } 1 \text{ gul})$ og forklar, hvilke regneprincipper du har brugt.

Opgave 463

Et eksperiment består i 4 kast med en sko, der erfaringsmæssigt lander på sålen 15 % af gangene. Det registreres, om skoen lander på sålen eller ej.

- Tegn et chancetræ, der viser de mulige udfald.
- Bestem $P(\text{den lander på sålen } 4 \text{ gange})$.
- Bestem $P(\text{den lander på sålen } 0 \text{ gange})$.
- Bestem $P(\text{den lander på sålen netop } 3 \text{ gange})$.
- Bestem $P(\text{den lander på sålen netop } 2 \text{ gange})$.

Opgave 464

En mesterlig darts spiller rammer Bulls Eye 30 % af gangene. Hun får nu 3 forsøg, og det registreres kun, om hun rammer Bulls Eye eller ej.

- Tegn et chancetræ, der viser de mulige udfald.
- Bestem $P(3 \text{ Bulls Eye})$.
- Gør rede for, hvor mange udfald der er i hændelsen i delspørgsmål d. "2 Bulls Eye".
- Bestem $P(2 \text{ Bulls Eye})$.
- Bestem $P(0 \text{ Bulls Eye})$.

Opgave 465

En Heavy Metal interesseret dreng har 10 forskellige sorte T-shirts, hvoraf 2 er med Motionless in White, 3 er med Black Sabbath, og 1 Five Finger Death Punch og 4 med Slayer.

Hans mor synes, de alle sammen ligner hinanden og pakker to tilfældige ned i hans weekendtaske til hytteturen.

- Tegn et chancetræ over de mulige udfald, han kan opleve, når han åbner tasken.

Bestem:

- $P(1 \text{ Five Finger Death Punch og } 1 \text{ Slayer})$
- $P(2 \text{ Motionless in White})$
- $P(1 \text{ Black Sabbath og } 1 \text{ Slayer})$

Opgave 466

En person slår plat og krone 3 gange i træk.

- Bestem sandsynligheden for at få plat i det første kast.
- Bestem sandsynligheden for at få plat i alle 3 kast.

Opgave 467

Et eksperiment består i, at 2 symmetriske terninger med forskellige farver (en rød og en blå) kastes og man noterer sig de viste øjental som et talsæt med den røde ternings tal først (r, b) .

- Hvor mange forskellige udfald er der?
- Bestem sandsynligheden for de enkelte udfald.
- Hvad bliver ifølge modellen sandsynligheden for, at den røde terning viser tre øjne?

Opgave 468

To symmetriske terninger, en rød og en blå, kastes.

- Bestem sandsynligheden for, at den røde viser 3 øjne.
- Bestem sandsynligheden for, at de begge viser 3 øjne.