OPSPARING OG LÅN

HF Matematik C

Indhold:

Annuitetsopsparing

Der findes mange måder at spare op på. Vi vil her se på den såkaldte annuitetsopsparing. Emnet kan bruges som en del af det supplerende stof, og det kan anvendes som oplæg til projekt- eller emneforløb.

Indhold

- Udviklingen termin for termin
- Brug af formlen
- Eksempel 1: A ukendt
- Eksempel 2: b ukendt
- Eksempel 3: r ukendt
- Eksempel 4: n ukendt
- Husk
- Opgaver

Kendetegn

En annuitetsopsparing er kendetegnet ved at man hver termin (f.eks. hver måned) indbetaler et fast beløb. Hver termin tilskrives rente, og renten er konstant.

Det viser sig at man kan opstille en formel der knytter den samlede opsparing, den faste indbetaling, renten og antal indbetalinger sammen. Dette materiale drejer sig om anvendelse af annuitetsformlen. På linket her kan du læse et bevis for formlen.

Vi bruger følgende betegnelser:
A saldoen opgjort netop når den sidste indbetaling foretages
b det faste beløb der indsættes hver termin
r rentefoden pr. termin, dvs. renten skrevet som decimalbrøk (f.eks. 3% = 0,03)
n antallet af indbetalinger

Med disse betegnelser gælder følgende formel for en annuitetsopsparing:

$$A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

I formlen kan man med b,r og n beregne A. Hvis man istedet isolerer b i formlen fås:

$$b = A \cdot \frac{r}{(1+r)^n - 1}$$

Man skal huske at A er størrelsen på opsparingen (saldoen) opgjort lige når den sidste indbetaling er foretaget. Sidste indbetaling når altså ikke at tilskrives renter.

Vi vil nedenfor se på hvordan formlen for annuitetsopsparingen virker i forskellige opgavetyper. Men inden da illustrerer vi med et eksempel hvordan opsparingen udvikler sig termin for termin.

Udviklingen termin for termin

Vi kan forestille os at vi hvert år indsætter 1000 kr på en konto hvor renten er 7% p.a. (pr. år). År for år vil opsparingen udvikle sig som følger:

Indbetaling	Saldo i kr.
1	1000
2	2070
3	3215
4	4440
5	5751
6	7153
7	8654
8	10260
9	11978
10	13816
11	15784
12	17888

I tabellen ser vi at saldoen f.eks. efter den 2. indbetaling er 2070. Hvis vi lader A_n betegne saldoen umiddelbart efter den n´te indbetaling, kan vi forklare tabellen på følgende måde:

Efter 1. indbetaling:
Pr. definition er $A_1 = 1000$, da saldoen jo opgøres umiddelbart efter 1. indbetaling på 1000 kr.
Efter 2. indbetaling:
Når der er gået en termin har A_1 fået tilskrevet renter og 2. betaling foretages. Man lægger 7% til et beløb ved at gange det med 1,07:
$A_2 = A_1 \cdot 1{,}07 + 1000 = 1000 \cdot 1{,}07 + 1000 = 2070$
Efter 3. indbetaling:
Når der er gået et år mere har A_2 fået tilskrevet renter og 3. betaling foretages.
$A_3 = A_2 \cdot 1{,}07 + 1000 = 2070 \cdot 1{,}07 + 1000 = 3215$

Sådan kan man fortsætte med at beregne saldoen på kontoen efter hver termin.

Brug af formlen $A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$

I eksemplet ovenfor fandt vi frem til at saldoen efter 3. indbetaling var 3215. Saldoen kunne også beregnes vha. formlen $A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$.

Vi har b = 1000, r = 7% og n = 3:

$$A = b \cdot \frac{(1+r)^n}{r} = 1000 \cdot \frac{(1+0{,}07)^3 - 1}{0{,}07} = 3215$$

Hvis man er interesseret i saldoens udvikling termin for termin kan man vha. et regneark lave en tabel som ovenfor. Hvis man derimod blot er interesseret i saldoen efter et bestemt antal indbetalingen er formlen for annuitetsopsparingen

$A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ bekvem.

I formlen indgår 4 størrelser. Vi gennemgår nedenfor de fire situationer hvor vi kender tre af størrelserne og skal beregne den fjerde vha. formlen $A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$.

Eksempel 1: A ukendt

Vi indsætter hver måned 910 kr og vi får en månedlig rente på 2%. Hvor mange penge har vi efter den 17. indbetaling?
Vi indsætter de kendte størrelser i formlen:

$$A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 910 \cdot \frac{(1+0{,}02)^{17} - 1}{0{,}02} = 18211$$

Vi har indsat 910 kr. 17 gange, så alt i alt har vi indsat: $17 \cdot 910 = 15470$
Da vi ender med en saldo på 18211 kr., har vi fået $18211 - 15470 = 2741$ kr i rente.

Eksempel 2: b ukendt

Vi ønsker at spare 1.000.000 kr op ved indbetaling af et fast beløb pr. måned. Vi får 1% i månedlig rente. Vi agter at gøre det i 7 år, altså foretage 84 indbetalinger. Hvor meget skal vi da indbetale pr. måned?

Man kan omforme $A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ til $b = A \cdot \frac{r}{(1+r)^n - 1}$. Med A = 1.000.000, r = 1% og n = 84 fås:

$$b = A \cdot \frac{r}{(1+r)^n - 1} = 1000000 \cdot \frac{0{,}01}{(1+0{,}01)^{84} - 1} = 7652{,}73$$

Med en månedlig indbetaling på 7653 kr (afrundet) vil vi i alt nå at indbetale $84 \cdot 7652{,}73 = 642.829$. Da har vi fået tilskrevet renter på i alt: $1000000 - 642829 = 357.171$ kr.

Eksempel 3: r ukendt

Hvad er den årlige rente på en annuitetsopsparing hvis vi hvert år indsætter 3000 kr., og vi umiddelbart efter den 20. indbetaling har 83.000 kr?

Det viser sig at man ikke kan isolere størrelsen r i formlen $A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$. Man er nødt til at prøve sig frem med forskellige renter:

I formlen $A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ udregnes højresiden ved forskellige årlige renter:

Årlig rente	Saldo i kr.
2,00%	72.892
2,25%	74.735
2,50%	76.634
2,75%	78.592
3,00%	80.611
3,25%	82.693
3,50%	84.839
3,75%	87.052
4,00%	89.334

Vi ønsker at få en saldo på 83.000 kr., og vi kan se at den årlige rente må ligge mellem 3,25% og 3,5%

Vi udregner eksempelvis for r = 3,25%:

$$A = 3000 \cdot \frac{(1+0{,}0325)^{20} - 1}{0{,}0325} = 82.693$$

Vi kan dernæst forsøge med 3,26%, 3,27% osv.
Ved på denne måde at efterprøve får man præcist r = 3,286%.

Eksempel 4: n ukendt

En familie ønsker at spare 2.000.000 kr. op. De kan betale 15.000 kr. pr. måned, og banken tilbyder en fast månedlig rente på 0,7%. Hvor mange måneder vil de være om at nå det ønskede mål?

Der er to metoder til at finde resultatet:

- Man kan prøve sig frem som i eksempel 3 hvor renten er ukendt. Man prøver sig frem med forskellige værdier af n for at ramme en saldo på 2 mio. kr.
- Man kan isolere n i annuitetsopsparingsformlen. For at forstå det skal man have læst om logaritmer s. 60 og om "eksponentielle ligninger" s. 152 i bogen.

Hvis man af annuitetsformlen udregner n, får man:

$$n = \frac{\log(\frac{A \cdot r}{b} + 1)}{\log(1+r)}$$

Med A = 2.000.000 kr., b = 15.000 kr. og r = 0,7%:

$$n = \frac{\log(\frac{A \cdot r}{b} + 1)}{\log(1+r)} = \frac{\log(\frac{2000000 \cdot 0{,}007}{15000} + 1)}{\log(1+0{,}007)} = 95 \text{ (afrundet)}$$

Det tager altså familien ca. 95 måneder eller næsten 8 år. Familien indbetaler i alt: $95 \cdot 15000 = 1425000$. Dermed får den i alt i rente: $2000000 - 1425000 = 575000$ kr.

Husk

Der er flere ting der volder problemer ved annuitetsopsparinger:

- Rentefoden skal passe til terminen. Hvis man indbetaler pr. måned, skal renten være månedlig rente; hvis man indbetaler pr. kvartal, skal rente være kvartalsvis rente osv..
  Omregning f.eks. mellem månedlige og årlige renter kan du læse om i bogen s. 50.
- Når du bruger formlen $A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$, skal du ved indtastning på lommeregneren huske på regnehierarkierne f.eks. ved at sætte parentes om tælleren i brøken. Du kan repetere regnehierarkierne ved at læse i bogen s. 29.

Opgaver

Opgave 1

Lad A = 1200 kr., r = 2% og n = 8.

- Benyt annuitetsopsparingsformlen til at bestemme b

Svar: 139,81 kr.

Opgave 2

Lad A = 3000 kr., b = 300 kr. og n = 8.

- Benyt annuitetsopsparingsformlen til at bestemme r (2 decimaler)

Svar: 6,29%

Opgave 3

Lad b = 1273 kr., r = 11,11% og n = 7.

- Benyt annuitetsopsparingsformlen til at bestemme A

Svar: 12 496,31 kr.

Opgave 4

Lad A = 6170 kr., r = 4% og b = 193 kr..

- Benyt annuitetsopsparingsformlen til at bestemme n

Svar: 21

Opgave 5

Lad A = 56 218 kr., b = 900 kr. og n = 32.

- Benyt annuitetsopsparingsformlen til at bestemme r (2 decimaler)

Svar: 3,98%

Opgave 6

Lad A = 1 154 520 kr., r = 5,3% og b = 80 000 kr.

- Benyt annuitetsopsparingsformlen til at bestemme n

Svar: 11

Opgave 7

Lad A = 140 000 kr., r = 3,52% og n = 19.

- Benyt annuitetsopsparingsformlen til at bestemme b

Svar: 5301,36 kr.

Opgave 8

På en annuitetsopsparingskonto er det faste månedlige beløb 1620 kr., og den månedlige rente er 1%.

- Hvad er saldoen efter den 9. indbetaling?

Svar: 15177,01kr.

Opgave 9

En familie kan hver måned sætte 8000 kr i banken. De tilbydes en konto med en månedlig rente på 0,75%.

- Hvor mange måneder skal familien indsætte penge for at saldoen overstiger 250 000 kr.?

Svar: 29

Opgave 10

En familie ønsker at spare op til udbetalingen på et hus, der koster 4 000 000 kr. Udbetalingen er på 10% af husprisen. De kan få 0,4% i månedlig rente på en konto i GoldenDreams Banken

- Hvor stor skal den månedlige indbetaling være hvis familien ønsker at have til udbetalingen efter 48 indbetalinger?

Svar: 7575,52 kr

Opgave 11

Line har hvert kvartal indbetalt 4070 kr på en konto i banken. Efter 26. kvartalsvise indbetalinger er det blevet til 160 000 kr.

- Hvad har den kvartalsvise rente været (2 decimaler)?
- Hvilken årlig rente svarer en sådan (afrundet) kvartalsvis rente til (afrundes til 2 decimaler)?

Svar: 3,14%, 13,16%

Opgave 12

Betragt en annuitetsopsparing hvor den faste månedlige indbetaling er 8000 kr og den månedlige rente er 1,3%. Bestem saldoen efter 2., 3. og 4. indbetaling og de samlede tilskrevne renter efter 2., 3. og 4. indbetaling.

Svar:

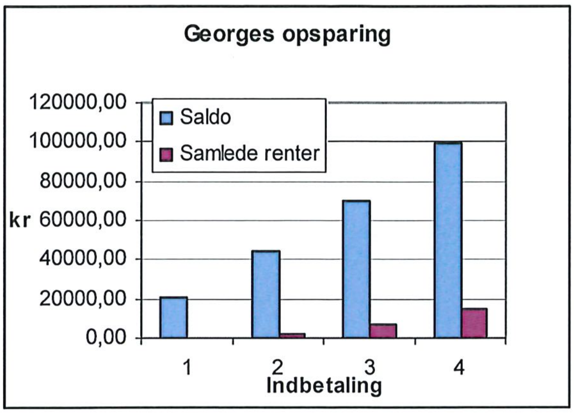
Indbetaling	Rente	Saldo	Samlede renter
1	0,00	8000,00	0,00
2	104,00	16104,00	104,00
3	209,35	24313,35	313,35
4	316,07	32629,43	629,43

Opgave 13

På en konto indbetaler George et årligt fast beløb på 21 000 kr. Renten er 11% p.a.

- Hvor mange penge har George umiddelbart efter den 4. indbetaling?
- Lav et stolpediagram der illustrerer saldoen og de samlede tilskrevne renter efter henholdsvis 1., 2., 3. og 4. termin

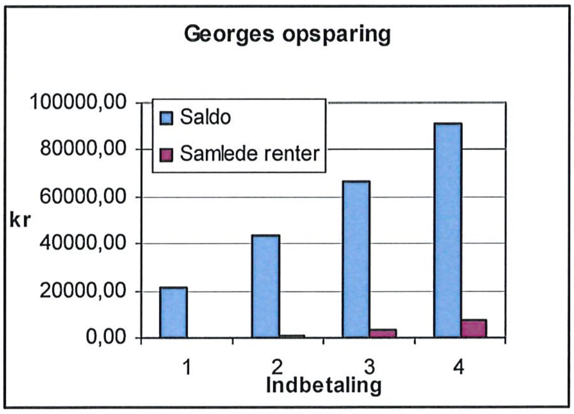
Svar: 98 904,35 kr.



Opgave 14

Lav samme opgave som ovenfor – blot hvor renten er det halve, altså 5,5% p.a.

Svar: 91 187,59 kr.



Opgave 15

På en annuitetsopsparingskonto indbetaler en mand 1200 kr. om måneden til en månedlig rente på 2,3%.

- Hvad står der på kontoen umiddelbart efter den 15. indbetaling?
- Hvor meget har han i alt fået i rente?

Manden holder op med at ryge og kan nu månedligt betale 2400 kr.

- Besvar nu de samme spørgsmål som ovenstående.
- Hvad er der sket?

Svar: 21207,80 kr.; 3207,80 kr.; 42415,60 kr.; 6415,62 kr.. Både saldo og rentebeløbet fordobles.

Opgave 16

På en annuitetsopsparingskonto i København indbetaler en mand 1835 kr om året til en årlig rente på 7,3%.

- Hvad står der på kontoen umiddelbart efter den 28. indbetaling?
- Hvor meget har han i alt fået i rente?

Manden bliver kontaktet af Vestjysk Spare- og Spinkekasse, der tilbyder en annuitetsopsparingskonto med en årlig rente der er det dobbelte af renten på kontoen i København

- Besvar nu de samme spørgsmål som ovenstående.
- Betyder en fordobling af renten en fordobling af opsparingen og af den samlede rentetilskrivning?

Svar: 155 624 kr.; 104 244 kr.; 558 190 kr.; 506 810 kr. Nej, en fordobling af renten betyder her mere end en tredobling af opsparingen og næsten en femdobling af rentebeløbet.

Opgave 17

En kvinde opretter en annuitetsopsparingskonto med en kvartalsvis indbetaling på 16 000 kr. Der tilskrives en kvartalsvis rente på 3%.

- Hvad står der på kontoen umiddelbart efter den 20. indbetaling?
- Hvor meget har hun i alt fået i rente?

Kvinden overvejer at fortsætte indbetalingerne til og med den 40. indbetaling.

- Hvad står der på kontoen umiddelbart efter den 40. indbetaling?
- Betyder en fordobling af antallet af indbetalinger en fordobling af opsparingen og af den samlede rentetilskrivning?

Svar: 429 926 kr., 109 926 kr., 1 206 420 kr.; 566 420 kr. Nej, der sker her ca. en tredobling af opsparingen og ca. en femdobling af den samlede rentetilskrivning.

Opgave 18

Tanja beslutter at indbetale 3500 kr hver måned på en konto, hvor hun får 0,9% i rente pr. måned.

- Hvor meget vil der står på kontoen umiddelbart efter den 13. indbetaling?

Det viser sig at Tanja får nogle uforudsete udgifter, så hun kun når at foretage 10 indbetalinger. Hun lader dernæst pengene stå i 3 måneder til den aftalte rente.

- Hvor meget står da på kontoen?
- Hvor meget mister Tanja i renteindtægt ved at afholde sig fra at indbetale de sidste 3 gange?

Svar: 48 039,94 kr.; 37445,15 kr.; 94,78 kr.

Opgave 19

I gennemgangen af annuitetsopsparingen blev det nævnt at formlen $A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ kan omformes til $b = A \cdot \frac{r}{(1+r)^n - 1}$. Vis hvordan.

Opgave 20

I gennemgangen af annuitetsopsparingen blev det nævnt at formlen $A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ kan omformes til $n = \frac{\log(\frac{A \cdot r}{b} + 1)}{\log(1+r)}$. Læs først i bogen om eksponentielle ligninger s. 152, og vis dernæst hvordan omformningen kan gøres.

Opgave 21

For en given annuitetsopsparing kan vi kalde saldoen efter den k-te indbetaling for A_k og tilsvarende kan vi kalde saldoen efter den foregående indbetaling for A_{k-1}. Opstil en formel der udtrykker A_k ved A_{k-1}, r og b.

Låntyper

I bogens del 2 kan du læse om "Procent og rente" (s. 41-66). Vi vil i materialet her gå lidt videre til mere komplicerede renteberegninger ved forskellige låntyper. Stoffet er et muligt supplement til kernestoffet, og du skal derfor høre din lærer, om det er noget klassen skal gennemgå. Endvidere kan materialet anvendes til projekt- og emnearbejde.

Materialet vil med fordel kunne indgå i et tværfagligt samarbejde med samfundsfag.

En stor del af forbruget i det danske samfund finansieres ved hjælp af lån. Mange af os låner penge når vi skal købe større forbrugsgoder, såsom biler. Lån er imidlertid også en afgørende del af det danske boligmarked. Materialet her er en introduktion til tre fundamentale låntyper.

Indhold

Materiale om låntyper
Opgaver

Introduktion om låntyper

Der findes et hav af forskellige låntyper når man låner til et tv, en bil, en lejlighed eller et hus. Vi vil her se på tre typer lån:

- Serielån
- Stående lån
- Annuitetslån

De er alle sammen lån hvor renten ligger fast i hele lånets løbetid (dvs. tilbagebetalingsperiode). Ser man på lånemarkedet i dag findes også variabelt forrentede lån - altså lån hvor renten kan ændres i lånets løbetid. Den type lån er imidlertid noget sværere at regne på, så dette spændende emne behandler vi ikke her.

Begreber

Vi ser på serielån, stående lån og annuitetslån ét efter ét. Men først lidt om den generelle sprogbrug i forbindelse med lån:

Når man låner penge, taler man om:

lånets hovedstol:	dvs. lånets størrelse
lånets termin:	tiden mellem to rentetilskrivninger (eller mellem to ydelser, se nedenfor)
løbetid:	den aftalte tid der går med at tilbagebetale lånet
ydelse:	den samlede betaling pr. termin
rente:	den del af ydelsen der går til betaling af renterne der tilskrives hver termin

afdrag: den del af ydelsen der går til nedbringelse af gælden.

Kort kan man sige:

ydelse = rente + afdrag

Lad os se på et eksempel på sprogbrug:
Hr. Skovsmose låner 10 000 kr. i banken (hovedstol = 10 000). Der tilskrives 2% i rente hvert år, og han indbetaler et beløb hvert år for at tilbagebetale lånet (der er årlige terminer). Han betaler en fast *ydelse* på 600 kr. om året, hvor 200 kr det første år går til betaling af rente, mens resten går til til afdrag på gælden (afdrag 1. år: 400 kr.).

Hvad er rente?
Vær opmærksom på at "rente" undertiden bruges lidt tvetydigt. "Renten" kan dels betegne et beløb og dels en procentsats. Hvis *renten* er 5% pr. år på et lån med en hovedstol på 100 000 kr., siger man undertiden også blot at *renterne* på lånet beløber sig til 5 000 kr. Det giver sjældent anledning til misforståelser, men man skal gøre sig klart om man taler om en procentsats eller et beløb.

Vi vil ikke her omtale lån hvor rentetilskrivning og ydelse falder på forskellige tidspunkter.

Serielån

Et serielån ***afdrages*** med et ***fast*** beløb pr. termin. Når restgælden falder, vil rentebetalingen pr. termin også falde så den samlede ydelse falder med tiden fordi ydelsen er rentebetaling plus afdrag.

Eksempel

Lad os se på et eksempel på et serielån hvor hovedstolen er 10 000 kr., det faste afdrag er 2000 kr., terminen et år og den årlige rente 6%:

Termin	Afdrag	Rente i kr.	Ydelse	Restgæld
1	2000	600	2600	8000
2	2000	480	2480	6000
3	2000	360	2360	4000
4	2000	240	2240	2000
5	2000	120	2120	0

I oversigten for serielånet ser man rækken af ydelser: ydelsesrækken. Det kaldes også mere generelt en *betalingsrække.*

Efter ét år er der løbet $10\ 000 \cdot 0{,}06 = 600$ kr. på i renter. Det faste afdrag er aftalt til 2000 kr., så ydelsen kan beregnes til:

$$ydelse = rente + afdrag = 600 + 2000 = 2600$$

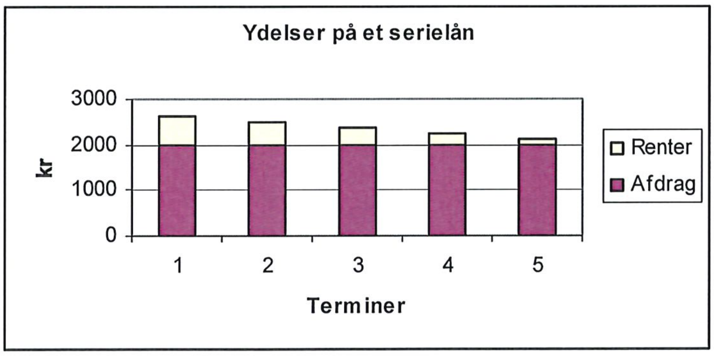
Efter 1. termin er restgælden altså 8000 kr. idet vi betalte de påløbne renter samt et afdrag på 2000 kr.. Bemærk at vi betalte 2600 kr., men gælden nedbragtes kun med 2000 kr., da 600 kr. gik til renter. De 600 kr. er *prisen for* at have lånt pengene i et år.

Næste termin er der løbet $restgæld \cdot 0{,}06 = 8000 \cdot 0{,}06 = 480$ (kr.) på i rente. Afdraget er stadig 2000 kr., så ydelsen bliver nu:

$$ydelse = rente + afdrag = 480 + 2000 = 2480$$

Ydelsen er altså blevet mindre. Restgælden efter 2. termin bliver 8000 minus det faste afdrag på 2000 kr., altså 6000 kr.. Efter 5 terminer er gælden tilbagebetalt.

Ydelserne kan illustreres således:



Stående lån

På et stående lån ***afdrager man ikke på gælden undervejs***. Ydelsen udgøres kun af rentebetalingen. I den sidste termin afdrages lånet helt.

Eksempel

Lad os se på et eksempel på et stående lån hvor hovedstolen er 50 000 kr., løbetiden (tilbagebetalingstiden) er 8 år, terminen et år og den årlige rente 7%.

Termin	Afdrag	Rente i kr.	Ydelse	Restgæld
1	0	3500	3500	50 000
2	0	3500	3500	50 000
3	0	3500	3500	50 000
4	0	3500	3500	50 000
5	0	3500	3500	50 000
6	0	3500	3500	50 000
7	0	3500	3500	50 000
8	50 000	3500	53 500	0

Vi ser at der hvert år betales de påløbne renter på 3500 kr.. Der afdrages ikke undervejs på lånet, så den samlede ydelse er:

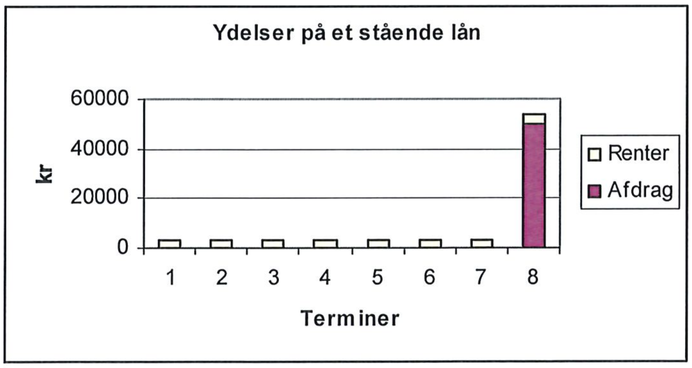
$$ydelse = rente + afdrag = 3500 + 0 = 3500$$

Efter 8 år afdrages hele lånet på 50 000, så ydelsen er her:

$$ydelse = rente + afdrag = 3500 + 50000 = 53500$$

Da man ikke afdrager undervejs, er restgælden undervejs 50 000 kr. da man udelukkende undervejs betaler de løbende renter.

Ydelserne kan illustreres således:



Annuitetslån

For et annuitetslån gælder det at ydelsen er konstant. Der findes mere materiale om annuitetslån her: *link*
Vi husker at:

$$\text{ydelse} = \text{rente} + \text{afdrag}$$

Derfor vil rentedelen af ydelsen i begyndelsen på et annuitetslån være relativ stor, men efterhånden som restgælden bliver mindre vil rentedelen minskes og afdragsdelen af ydelsen øges.

Eksempel

Lad os se på et annuitetslån hvor hovedstolen er 40 000 kr., den faste ydelse er 6788 kr., terminen et år og den årlige rente 5%.

Termin	Afdrag	Rente i kr.	Ydelse	Restgæld
1	4988	1800	6788	35 012
2	5212	1576	6788	29 800
3	5447	1341	6788	24 353
4	5692	1096	6788	18 660
5	5948	840	6788	12 712
6	6216	572	6788	6 496
7	6496	292	6788	0

Efter et år kan rentebetalingen beregnes som:

$$Hovedstol * rentesats = 40000 \cdot 0{,}05 = 1800$$

Da ydelsen er aftalt til 6788 kr., kan afdraget blive på:

$$afdrag = ydelse - rente = 6788 - 1800 = 4988$$

Den nye restgæld bliver således:

$$Gæld - afdrag = 40000 - 4988 = 35012$$

Samme struktur gentager sig: den nye rentebetaling beregnes som gammel restgæld gange 5%:

$$restgæld * rentesats = 35012 \cdot 0{,}05 = 1576$$

Resultatet trækkes fra den faste ydelse for at få afdraget:

$$afdrag = ydelse - rente = 6788 - 1576 = 5212$$

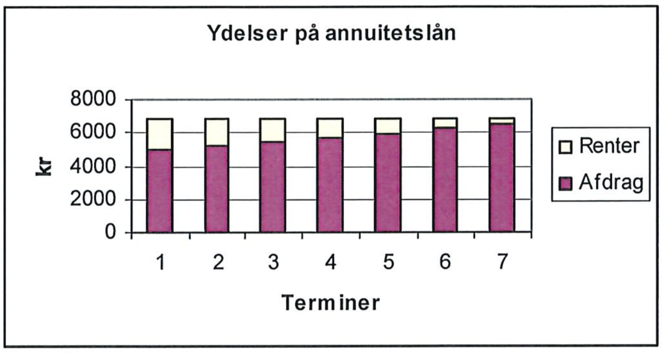
Dette afdrag trækkes fra den gamle restgæld, og man har den nye restgæld:

$$gammel\ restgæld - afdrag = 35012 - 5212 = 29800$$

Af oversigten over annuitetslånets betalingsrække kan vi se at lånet er tilbagebetalt efter 7 år.

I et annuitetslån er ydelsen som nævnt konstant. Når restgælden bliver mindre, bliver rentebetalingen mindre og dermed bliver afdragsdelen af ydelsen efterhånden større.

Ydelserne kan illustreres således:



Sammenfattende om serielån, stående lån og annuitetslån

Vi kan sammenfatte de vigtigste træk for serielån, stående lån og annuitetslån på følgende måde:

- Serielån: ***afdraget er fast***. Deraf følger at ydelsen falder med tiden.
- Stående lån: Der er ***intet afdrag undervejs***, men kun rentebetaling. Lånet tilbagebetales ved udløb.
- Annuitetslån: ***ydelsen er fast***. Deraf følger at med tiden øges afdraget, mens rentebetalingen falder.

For alle lån skal man huske sammenhængen:

ydelse = rente + afdrag

Hvorfor er der forskellige typer lån?

Vi har nævnt serielån, stående lån og annuitetslån, og der findes mange andre typer lån. Men hvorfor er der forskellige typer lån? Det er kompliceret at svare på. Vi kan se sagen fra to sider:

- fra låntagerens side (den der låner penge)
- fra långivers side (den der udlåner penge)

Låntager har måske brug for en særlig måde at betale pengene tilbage på: Nogle foretrækker måske et stående lån da de ved at de selv får en portion penge ved lånets udløb (ingen afdrag undervejs). Andre ønsker måske ved at optage et annuitetslån at få en fast ydelse på huslånet og opsparing undervejs så husholdningsbudgettet ligger fast, og der spares op i huset.

Långiver kan også være interesseret i at udbyde særlige typer lån – måske fordi långiverne selv har indtægter der kan matche et særligt udlån (det långiver får ind, matcher det han kan låne ud).

Alt dette kompliceres af skattelovgivningen, der under visse omstændigheder giver muligheder for at trække renterne fra (reducere skatten).

Ser vi på serielånet i eksemplet overfor, kan man se at rentebetalingerne bliver mindre med tiden:

Termin	Afdrag	Rente	Ydelse	Restgæld
1	2000	600	2600	8000
2	2000	480	2480	6000
3	2000	360	2360	4000
4	2000	240	2240	2000
5	2000	120	2120	0

Hvis renterne kan "trækkes fra" i skat, kan man altså trække mest fra i starten og dermed betale mindst skat i starten (hvor man måske lige har fået job og ikke tjener så meget).

Endelig må det nævnes at lovgivningen sætter en del rammer for hvilke typer lån der f.eks. må anvendes ved huskøb.

Opgaver

Der findes ud over nedenstående opgaver en mængde opgaver særligt om annuitetslån: link

Opgave 1

Fru Svendsen optager et serielån på 1 500 000 kr med årlige afdrag på 50 000 kr. Hun kan ikke lige huske rentesatsen på lånet.

- Hvor lang er løbetiden på lånet?

Svar: 30 år

Opgave 2

Familien Jensen overvejer at optage enten et seksårigt serielån eller et seksårigt annuitetslån. De har lidt flere penge til rådighed i begyndelsen af seksårsperioden.

- Hvilken låntype bør de vælge (se bort fra skattespørgsmål)?

Svar: Det bør indgå i overvejelsen at på serielån er ydelsen faldende over tid, mens den for annuitetslån er konstant.

Opgave 3

Et 4,5% serielån med årlige terminer og hovedstolen 13000 kr afvikles med årlige betalinger på 1000 kr.

- Hvor lang er løbetiden?

Svar: 13 år.

Opgave 4

På et serielån afdrages hovedstolen på 36 000 kr med 6 afdrag (årlige). Renten er 9% p.a.

- Opstil ydelsesrækken for lånet (dvs. beregn termin for termin først rentebetalingen og dernæst ydelsen)

Svar:

År	Ydelse
1	9240
2	8700
3	8160
4	7620
5	7080
6	6540

Opgave 5

Hr Gadagung har optaget to lån. Han har dels et femårigt, 5% stående lån (årlige terminer) med hovedstol 100 000 kr og dels et femårigt annuitetslån med hovedstol på 100 000 kr, årlige terminer, en rente på 5% p.a og en årlig ydelse på 23 097,48 kr.

- Hvad er Hr Gadagungs *samlede* rentebetaling efter henholdsvis 1, 2, 3, 4 og 5 år?

Svar:

År	Rentebetaling i kr
1	10000
2	9095
3	8145
4	7147
5	6100

Opgave 6

Et serielån på 360 000 kr afdrages med 10 årlige afdrag. Renten er 5% p.a.

- Beregn rentebetalingen termin for termin (brug gerne et regneark)

Svar:

År	Rentebetaling i kr
1	18000
2	16200
3	14400
4	12600
5	10800
6	9000
7	7200
8	5400
9	3600
10	1800

Opgave 7

Et annuitetslån på 360 000 kr har en løbetid på 10 år (årlige terminer). Renten er 5% p.a og den årlige ydelse er 46 621,65 kr.

- Beregn rentebetalingen termin for termin (brug gerne et regneark)

Svar:

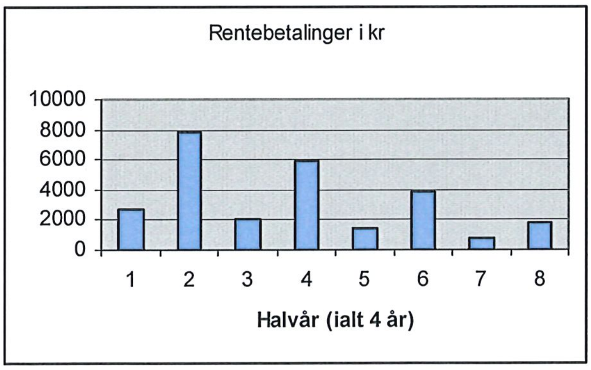
År	Rentebetaling i kr
1	18000
2	16569
3	15066
4	13489
5	11832
6	10092
7	8266
8	6348
9	4334
10	2220

Opgave 8

Hr. Kikosan har to lån. Han har et 80 000 kr fireårigt annuitetslån med halvårlige terminer, en halvårlig rentesats på 3,4% og en halvårlig ydelse på 11 589,61 kr. Han har også et 90 000 kr. fireårigt 6% serielån med helårlige terminer.

- Lav et søjlediagram der halvår for halvår illustrerer Hr. Kikosans samlede rentebetalinger

Svar:



Forløb om annuitetslån

Dette materiale fokuserer på den type lån der betegnes *annuitetslån*. Emnet kan bruges som en del af det supplerende stof, og materialet kan anvendes til projekt- og emnearbejde.

Materialet består af:

- Om formlen for annuitetslån (GRYN-formlen)
- Eksempel 1: G ukendt
- Eksempel 2: y ukendt
- Eksempel 3: r ukendt
- Eksempel 4: n ukendt
- Opgaver i annuitetslån

Om formlen for annuitetslån (GRYN-formlen)

Det særlige for et annuiteslån er at ***ydelsen er konstant***. Det vil sige at man skal betale samme beløb hver termin (f.eks. hver måned eller hvert kvartal). Tilbagebetalingen begynder én termin efter lånet udbetales. Renten antages at være fast i lånets løbetid. Hver termin tilskrives renter på lånet.

Det viser sig at man kan opstille en formel der knytter ydelsen, lånets størrelse (hovedstolen), renten og løbetiden sammen. I dette materiale vil vi fokusere på hvordan man anvender formlen for annuitetslån, dvs. hvordan man foretager beregninger.

På bogens hjemmeside findes to beviser for formlen.

Vi bruger følgende betegnelser:

G	hovedstolen (det lånte beløb)
r	rentefoden pr. termin, dvs. renten som decimalbrøk (f.eks. 8% = 0,08)
y	ydelsen
n	antallet af terminer

Med disse betegnelser gælder der den såkaldte GRYN-formel for et annuitetslån:

GRYN-formlen:

$$G = y\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

I formlen kan man med y, r og n beregne G. Hvis man istedet isolerer y i formlen fås:

$$y = G\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$$

I GRYN-formlen indgår fire størrelser. Vi ser nedenfor på de fire situationer hvor vi kender tre af størrelserne og skal beregne den fjerde vha. GRYN-formlen. Hvis du vil læse om udviklingen på et annuitetslån betragtet termin for termin kan du læse materialet om låntyper.

Eksempel 1: G ukendt

Hvis vi er parate til at betale en ydelse pr. måned på 1500 kr., renten pr. måned er 1,2%,og vi ønsker at afvikle lånet på 72 måneder, kan vi med GRYN-formlen beregne hvor meget vi kan låne:

Vi har y = 1500, r = 0,012, n = 72:

$$G = y\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = 1500\frac{1-(1+0{,}012)^{-72}}{0{,}012} = 72044$$

Vi bemærker at da den månedlige ydelse er 1500 kr, betaler vi i alt for lånet:

$$72 \cdot 1500 = 108000$$

Da hovedstolen blev beregnet til 72.044 kr., betyder det at vi i alt betaler følgende i rente:

$$108000 - 72044 = 35956$$

Eksempel 2: y ukendt

Vi kan vha. GRYN-formlen beregne den årlige ydelse vi skal betale på et annuitetslån hvor vi låner 51 000 kr, renten er 6,5% p.a. (pr. år) og løbetiden er 15 år.

Man kan omforme GRYN-formlen til følgende formel: $y = G\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$

Vi har G = 51 000, r = 0,065, n = 15: $y = G\frac{r}{1-(1+r)^{-n}} = 51000\frac{0{,}065}{1-(1+0{,}065)^{-15}} = 5424$

Vi noterer at da den årlige ydelse på det 15-årige lån er 5424 kr., betaler vi i alt:

$$15 \cdot 5424 = 81360$$

Da hovedstolen var på 51 000 kr. betyder det at vi i alt betaler følgende i rente:

$$81360 - 51000 = 30360$$

Eksempel 3: r ukendt

Hvad er den årlige rente på et annuitetslån hvor hovedstolen er 100 000 kr., den årlige ydelse er på 11 000 kr, og løbetiden er 10 år? Det viser sig, at man ikke kan isolere størrelsen r i GRYN-formlen. Man er nødt til at prøve sig frem med forskellige renter:

I GRYN-formlen $G = y\dfrac{1-(1+r)^{-n}}{r}$ udregnes højresiden ved forskellige årlige renter:

Årlig rente	Højreside i GRYN-formel
1,00%	104 184
1,25%	102 801
1,50%	101 444
1,75%	100 113
2,00%	98 808
2,25%	97 528

Vi udregner eksempelvis for r = 1,75%:

$$G = y\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = 100000\frac{1-(1+0{,}0175)^{-72}}{0{,}0175} = 100113$$

Vi ser at den beregnede hovedstol ligger tæt på 100 000 kr. Der reelle rente må ligge en anelse højere, svarende til en lidt lavere hovedstol. Ved at prøve flere gange får man mere præcist r = 1,7715%.

Eksempel 4: Ukendt n

På hvor mange måneder kan jeg tilbagebetale et annuitetslån på 2,2 mio. kr, hvor den månedlige ydelse er 20 000 kr. og den månedlige rente er 0,6%?
Der er to metoder:

- Man kan prøve sig frem som i eksemplet hvor renten er ukendt
- Man kan isolere n i GRYN-formlen. For at forstå det skal man have læst om logaritmer s. 60 og om "eksponentielle ligninger" s. 152 i bogen.

Man får:

$$n = -\frac{\log(1-\frac{G\cdot r}{y})}{\log(1+r)}$$

Da fås med G = 2 200 000 kr, y = 20 000 kr og r = 0,6%:

$$n = -\frac{\log(1-\frac{G\cdot r}{y})}{\log(1+r)} = -\frac{\log(1-\frac{2200000\cdot 0,006}{20000})}{\log(1+0,006)} = 180,34$$

Svaret er altså lidt over 180 måneder svarende til ca. 15 år.

Husk

Der er flere ting der volder problemer ved annuitetslån:

- Rentefoden skal stemme overens med terminen. Hvis renten er pr. måned, så skal ydelserne betales pr. måned osv. Omregning f.eks. mellem månedlige og årlige renter kan du læse om i bogen s. 50.

- Når du bruger GRYN-formlen $G = y\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$, skal du ved indtastning på lommeregneren huske på regnehierarkierne f.eks. ved at sætte parentes om tælleren i brøken. Du kan repetere regnehierarkierne ved at læse i bogen s. 29.

Opgaver

Nedenfor følger opgaver til materialet om annuitetslån.
Du kan også læse materialet om "låntyper", hvor annuitetslån behandles – og regne de tilhørende opgaver: link
Du kan også løse gamle eksamensopgaver indenfor annuitetslån: link.
Bemærk at der til den skriftlige eksamen ikke længere stilles denne type opgave.

Opgave 1

Lad G = 150 000 kr., r = 2,5% og n = 14.

- Benyt GRYN-formlen til at bestemme y

Svar: 12 830,48 kr.

Opgave 2

Lad G = 12 000 kr., y = 1000 kr. og n = 15.

- Benyt GRYN-formlen til at bestemme r

Svar: 2,93%

Opgave 3

Lad y = 12 000 kr., r = 4,5% og n = 28.

- Benyt GRYN-formlen til at bestemme G

Svar: 188 914,48 kr.

Opgave 4

Lad G = 12 000, y = 393,34 og r = 1,75%.

- Benyt GRYN-formlen til at bestemme n

Svar: 44

Opgave 5

Lad G = 66 000 kr., y = 700 kr. og n = 100.

- Benyt GRYN-formlen til at bestemme r

Svar: 0,12%

Opgave 6

Lad G = 12 345 kr., y = 719,74 kr. og r = 4,44%.

- Benyt GRYN-formlen til at bestemme n

Svar: 33

Opgave 7

Lad G = 50 000 kr., r = 2,55% og n = 26.

- Benyt GRYN-formlen til at bestemme y

Svar: 2 654,06 kr.

Opgave 8

Lad y = 300 000 kr., r = 11% og n = 11.

- Benyt GRYN-formlen til at bestemme G

Svar: 1 861 954,60 kr.

Opgave 9

Cykelsmeden "Krank og Fælg" tilbyder et annuitetslån til en uundværlig mountainbike til kun 17 000 kr. Der er månedlige terminer og den månedlige rente er 2%. Løbetiden er 8 år.

- Bestem den månedlige ydelse
- Hvor meget kommer man i alt til at betale i rente på lånet?

Svar: 399,72 kr.; 21 373,42 kr.

Opgave 10

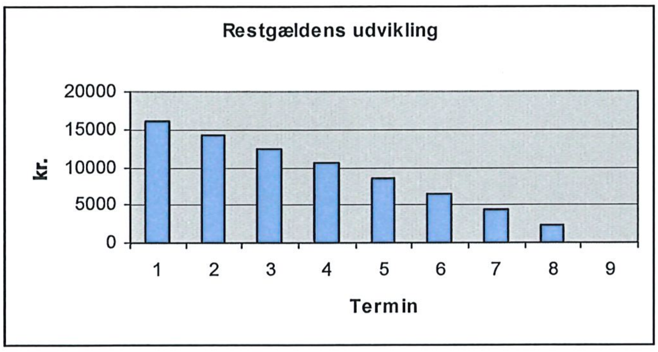
For at løse denne opgave skal du have læst afsnittet om annuitetslån i materialet om "låntyper".

På et annuitetslån betales hvert kvartal 2279,58 kr., den kvartårlige rente er 2,7% og lånet betales tilbage på 9 kvartaler

- Bestem G

- Lav et søjlediagram der termin for termin illustrerer restgælden

Svar: 18 000 kr.



Opgave 11

For at løse denne opgave skal du have læst afsnittet om annuitetslån i materialet om "låntyper".

Frank Nielsen tilbydes et annuitetslån på 45 000 kr med årlige terminer og en årlig rente på 5,6%. Han skal betale lånet tilbage på 7 år

- Bestem den årlige ydelse
- Opstil en tabel hvor man for hvert år kan aflæse rentebetaling, afdrag og restgæld

Svar: 7 946,84 kr.

Termin	Rente	Afdrag	Restgæld
1	2520	5427	39573
2	2216	5731	33842
3	1895	6052	27791
4	1556	6391	21400
5	1198	6748	14652
6	820	7126	7525
7	421	7525	0

Opgave 12

For at løse denne opgave skal du have læst afsnittet om annuitetslån i materialet om "låntyper".

Betragt et annuitetslån hvor hovedstolen er 50 000 kr, den månedlige ydelse er 2350,50 kr og den månedlige rente er 2,2%. Bestem restgæld, rentebetaling og afdrag efter henholdsvis 1., 2. og 3. ydelse.

Svar:

Termin	Rente	Afdrag	Restgæld
1	1100	1251	48749
2	1072	1278	47471
3	1044	1306	46165

Opgave 13

I gennemgangen af annuitetslån blev det nævnt at GRYN-formlen kan omformes til

$y = G\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$. Vis hvordan.

Opgave 14

I gennemgangen af annuitetslån blev det nævnt at GRYN-formlen kan omformes til

$$n = -\frac{\log(1-\frac{G\cdot r}{y})}{\log(1+r)}.$$

Læs først i bogen om eksponentielle ligninger s. 152, og vis dernæst hvordan omformningen kan gøres.

Opgave 15

For et givet annuitetslån kan vi kalde restgælden efter den k-te termin for G_k og tilsvarende kan vi kalde restgælden til den foregående termin for G_{k-1} . Opstil en formel der udtrykker G_k ved G_{k-1}, r og y.

Svar: $G_k = G_{k-1} - (y - G_{k-1}\cdot r) = G_{k-1}(1+r) - y$

Bevis for formlen for annuitetsopsparing

Sætning – dvs. den påstand vi efterfølgende skal bevise
Hvis man indbetaler det samme beløb b hver termin, og rentefoden er r, så er kapitalen A umiddelbart efter den n'te indbetaling:

$$A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Bevis
Sætningen bevises gennem et eksempel - det er forholdsvis enkelt at generalisere ud fra eksemplet. I eksemplet er

$$b = 700, \quad r = 0{,}06 \quad \text{og} \quad n = 4.$$

Vi skal se på saldoen umiddelbart efter hver indbetaling.

1. indbetaling: $A_1 = 700$

2. indbetaling: $A_2 = A_1 \cdot 1{,}06 + 700$
$= 700 \cdot 1{,}06 + 700$

3. indbetaling: $A_3 = A_2 \cdot 1{,}06 + 700$
$= (700 \cdot 1{,}06 + 700) \cdot 1{,}06 + 700$
$= 700 \cdot 1{,}06^2 + 700 \cdot 1{,}06 + 700$

4. indbetaling: $A_4 = A_3 \cdot 1{,}06 + 700$
$= (700 \cdot 1{,}06^2 + 700 \cdot 1{,}06 + 700) \cdot 1{,}06 + 700$
$= 700 \cdot 1{,}06^3 + 700 \cdot 1{,}06^2 + 700 \cdot 1{,}06 + 700 \qquad (1)$

Ved at sætte 700 uden for parentes i får vi:

$$A = 700 \cdot (1{,}06^3 + 1{,}06^2 + 1{,}06 + 1)$$

Vi skal have omskrevet udtrykket i parentesen, så vi kalder det for S:

$$S = 1{,}06^3 + 1{,}06^2 + 1{,}06 + 1 \qquad (2)$$

Vi har altså at

$$A = 700 \cdot S \qquad (3)$$

Af (2) kan man få:

$$S \cdot 1{,}06 = (1{,}06^3 + 1{,}06^2 + 1{,}06 + 1) \cdot 1{,}06$$
$$= 1{,}06^4 + 1{,}06^3 + 1{,}06^2 + 1{,}06 \qquad (4)$$

Det viser sig at være smart hvis man trækker (2) fra (4) – det gør vi så:

$$S \cdot 1{,}06 - S = 1{,}06^4 + 1{,}06^3 + 1{,}06^2 + 1{,}06 - (1{,}06^3 + 1{,}06^2 + 1{,}06 + 1)$$
$$= 1{,}06^4 + 1{,}06^3 + 1{,}06^2 + 1{,}06 - 1{,}06^3 - 1{,}06^2 - 1{,}06 - 1$$
$$= 1{,}06^4 - 1.$$

Altså har vi: $S \cdot 1{,}06 - S = 1{,}06^4 - 1. \qquad (5)$

Vi kan omskrive dette på følgende måde:

$$S \cdot 1{,}06 - S = S \cdot (1 + 0{,}06) - S = S + S \cdot 0{,}06 - S = S \cdot 0{,}06$$

Altså har vi: $S \cdot 1{,}06 - S = S \cdot 0{,}06$
Dette kan vi indsætte i (5):

$$S \cdot 0{,}06 = 1{,}06^4 - 1$$

$$S = \frac{1{,}06^4 - 1}{0{,}06}$$

Når vi indsætter dette i (3), får vi den endelige formel:

$$A = 700 \cdot \frac{1{,}06^4 - 1}{0{,}06}$$

Beviset kan gøres generelt ved at udskifte 700 med *b* og 1,06 med (1+ *r*).

Bilag 2

Bevis for formlen for gældsannuitet – udgave 1

Sætning

Sætning – dvs. den påstand vi efterfølgende skal bevise

Hvis man indbetaler ydelsen y *hver termin i* n *terminer (første gang man betaler er én termin efter lånet er optaget), og rentefoden er* r, ***så*** *er lånets størrelse:*

$$G = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

Bevis
Følgende bevis bygger på en sammenkædning af annuitetsopsparing, kapitalfremskrivning og annuitetslån.

Beviset bygger på en historie om Vagn fra Vanløse. Vagn drømmer om en lækker bil, men mangler penge. Han har en stenrig onkel i USA, onkel Bill.

Onkel Bill er på besøg hos Vagn, og de ser sammen på en bil. Onkel Bill tilbyder Vagn at låne Vagn penge på følgende betingelser:

Onkel Bill ønsker ikke at tabe penge. Derfor skal Vagn – når han kommer for at besøge onkel Bill i USA om to år – betale det lånte beløb tilbage. Dog skal dette beløb fremskrives fordi onkel Bill ville have fået renter af beløbet hvis han havde haft det stående i banken.

Vagn fra Vanløse skal således spare op til at betale onkel Bill det lånte beløb tilbage. Og han skal betale det lånte beløb **plus** renter.

Hvad Vagn skal spare op, kan vi udregne ved hjælp af formlen for opsparingsannuitet:

$$A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Her er beløbet *A* det beløb som Vagn lånte.

Beløbet Vagn skal betale onkel Bill er det lånte beløb (G) plus renter, altså:

$$G \cdot (1+r)^n$$

Da dette også er det beløb Vagn skal have sparet op, får vi:

$$G \cdot (1+r)^n = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Vi ønsker nu at isolere *G*, og derfor dividerer vi med $(1+r)^n$ på begge sider af lighedstegnet:

$$G = \frac{\left(b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}\right)}{(1+r)^n}$$

Når man dividerer et produkt med et tal, skal man dividere tallet op i én af faktorerne, og det gør vi her:

$$G = b \cdot \frac{\left(\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right)}{(1+r)^n}$$

Når man dividerer en brøk med et tal, skal man gange tallet i nævneren – det gøres her:

$$G = b \cdot \left(\frac{(1+r)^n - 1}{r \cdot (1+r)^n}\right)$$

Herefter dividerer vi med $(1+r)^n$ i alle tre led i brøken:

$$G = b \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)}{r}$$

Vi benytter nu potensregnereglen $\frac{1}{a^r} = a^{-r}$ og omformer til:

$$G = b \cdot \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}$$

Når det handler om et lån, betegner man terminsydelsen for *y*, så derfor skifter vi *b* ud med *y*:

$$G = y \cdot \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}$$

Og hermed har vi bevist formlen for annuitetslån.