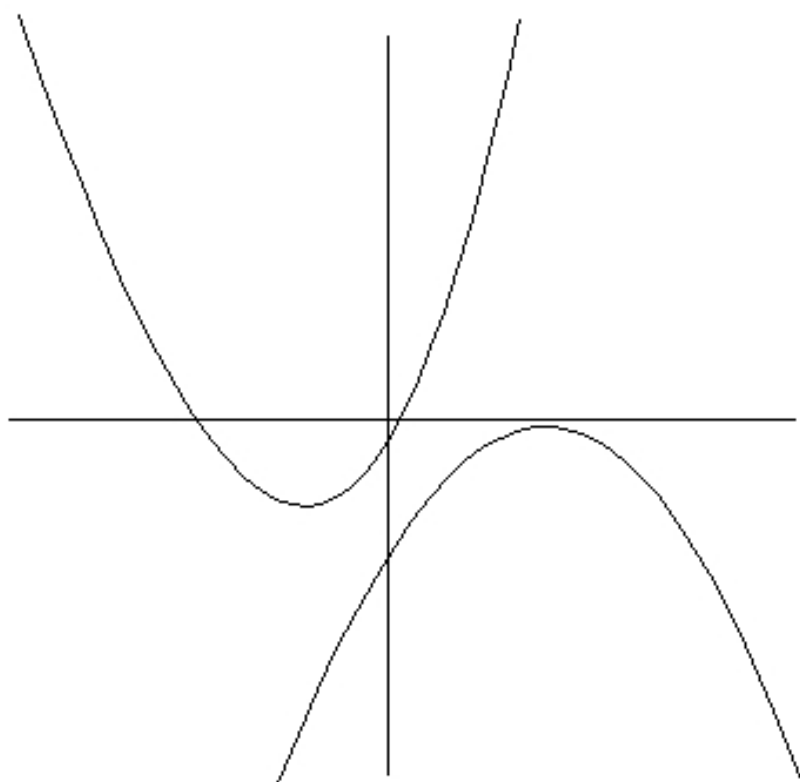


ANDENGRADSPOLYNOMIER



INTRODUKTION TIL ANDENGRADSPOLYNOMIER

Andengradspolynomier er en ny type funktioner, som bygger videre på *førstegradspolynomier*, der har standardforskrift $f(x) = a \cdot x + b$.

Førstegradspolynomier kaldes også for *lineære funktioner*.

Andengradspolynomiet opstår ud fra førstegradspolynomiet ved, at der tilføjes et andengradsled til de to eksisterende led i forskriften. Et *andengradsled* er et led, hvor x opløftes til anden potens.

Definition: Andengradspolynomium

Et andengradspolynomium er en funktion med forskriften

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \quad \text{hvor } a \neq 0$$

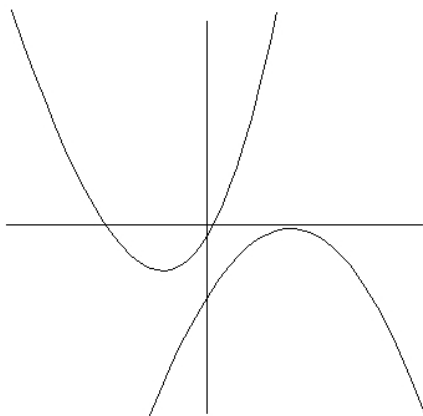
Funktionen kaldes ofte også p som henvisning til ordet *polynomium*.

$$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \quad \text{hvor } a \neq 0$$

Tallene a , b og c kaldes andengradspolynomiets *koefficienter*.

Den overstående forskrift kaldes *standardformen* for et andengradspolynomium.

Grafen for et andengradspolynomium kaldes en *parabel*.



Øvelse 1: Standardformlen

Opskriv standardformen for et 2. gradspolynomium:

Opskriv en begrundelse for, hvorfor koefficienten a ikke må være nul ($a \neq 0$) i et andengradspolynomium. Prøv at indsætte $a = 0$ i standardformen.

Øvelse 2: Aflæs koefficienter

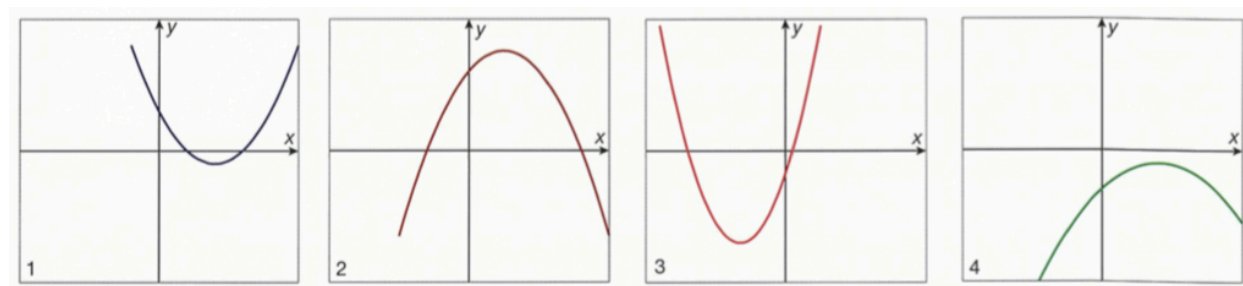
Skriv ind i tabellen, hvad koefficienterne a , b og c er i de følgende andengradspolynomier.

a)	$f(x) = 2x^2 - 7x + 25$	$a =$	$b =$	$c =$
b)	$f(x) = 0,25x^2 + 2x - 3,5$	$a =$	$b =$	$c =$
c)	$f(x) = -4x^2 + 2x + 1$	$a =$	$b =$	$c =$
d)	$f(x) = x^2 - 4$	$a =$	$b =$	$c =$
e)	$f(x) = -x^2$	$a =$	$b =$	$c =$
f)	$f(x) = 3x^2 - 9x$	$a =$	$b =$	$c =$

Hjælp: a er det tal, som er ganget på x^2
 b er det tal, som er ganget på x
 c er det tal, som står "alene" uden et x

Andengradspolynomiets koefficienter

De tre koefficienter a , b og c har hver deres karakteristiske betydning for parablens form og beliggenhed i koordinatsystemet. Her ses forskellige eksempler på parabler.²



Undersøg på næste side betydningen af andengradspolynomiets koefficienter ved brug af værktøjsprogrammet TI-Nspire.

² Grøn, Bjørn m.fl.: *Hvad er matematik? C*, Lindhardt og Ringhof 2014, s. 88-89

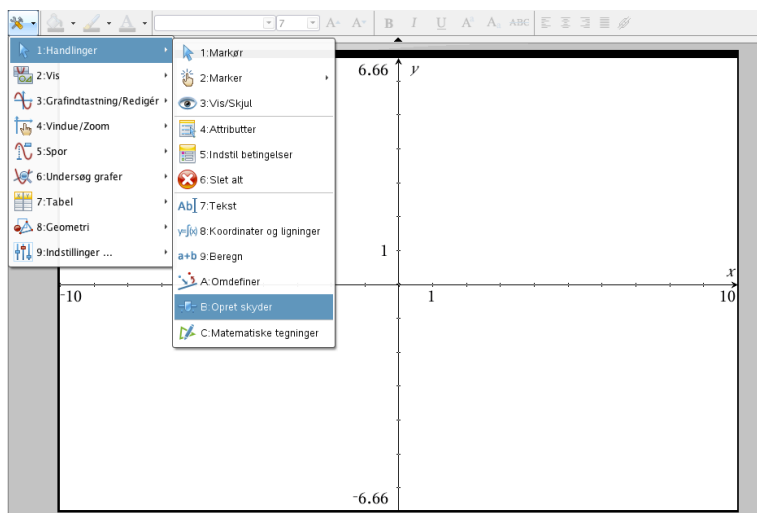
UNDERSØGELSE AF ANDENGRADSPOLYNOMIETS KOEFFICIENTER

Efter undersøgelsen bør du være i stand til at besvare eksamensspørgsmål om bestemte parablers udseende ud fra din viden om a , b og c .

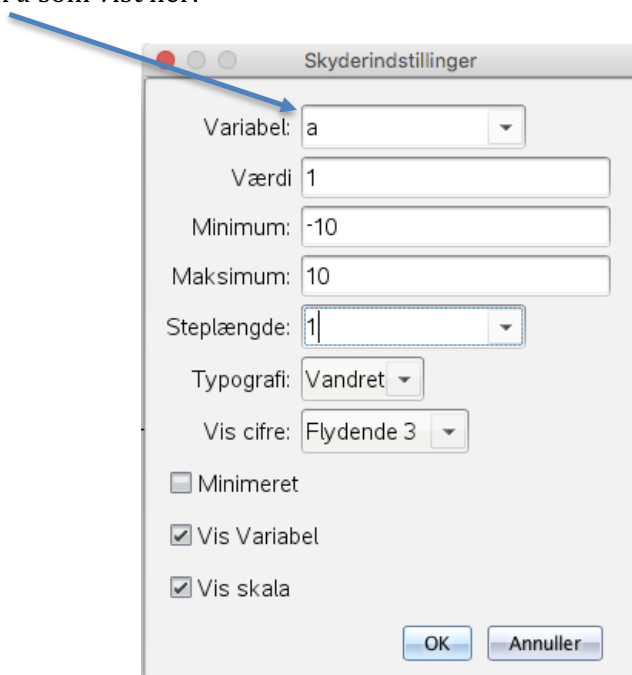
Åben et nyt dokument i TI-Nspire.

Vælg *tilføj grafer*.

Opret en skyder a ved hjælp af *Værktøj – Handlinger – Opret skyder*.

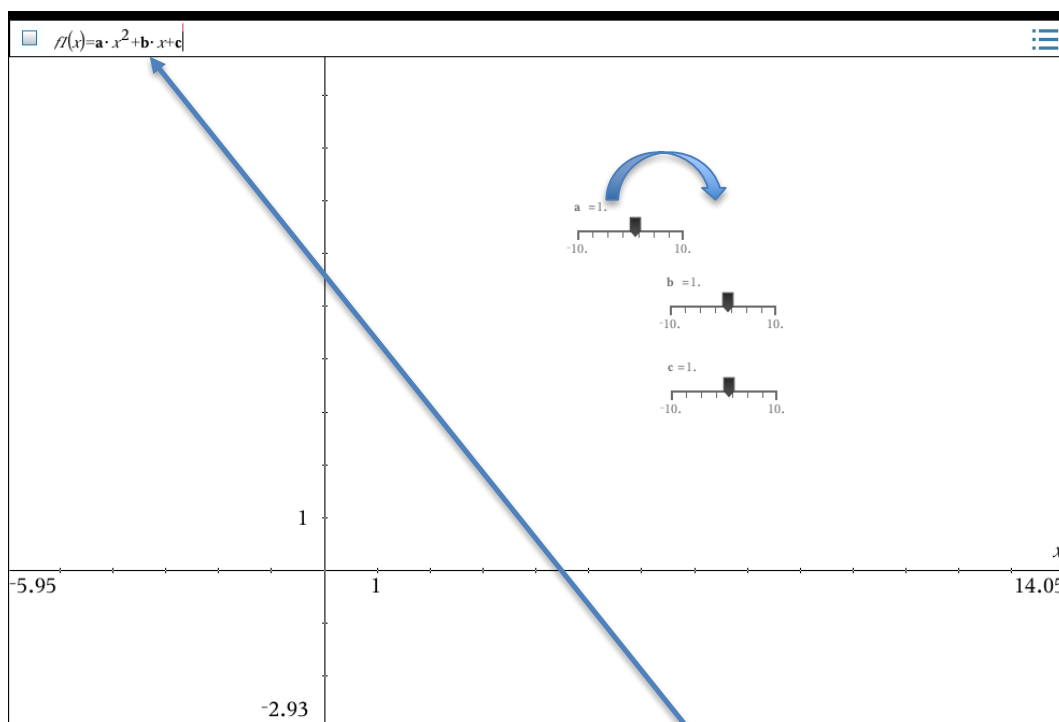


Indstil skyderen a som vist her:



Opret nu én af gangen koefficienterne b og c med samme fremgangsmetode.

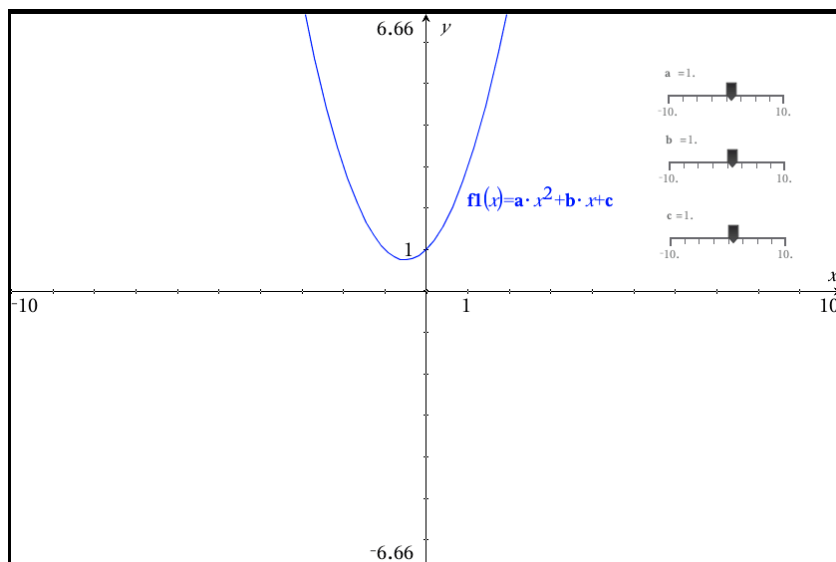
Anbring de oprettede skydere dér, hvor du ønsker dem ved hjælp af *højreklik - flyt*.



Dobbeltklik herefter øverst i grafvinduet for at få et skrivefelt frem - og indtast nu standardforskriften for et andengradspolynomium, hvorved du får tegnet en parabel.

Dit grafvindue bør nu indeholde en parabel samt de tre skydere for a , b og c .

Du er nu klar til at undersøge koefficienternes betydning for parablens udseende.

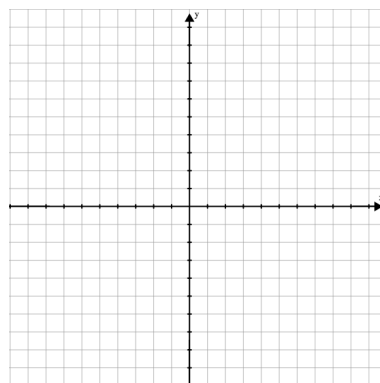
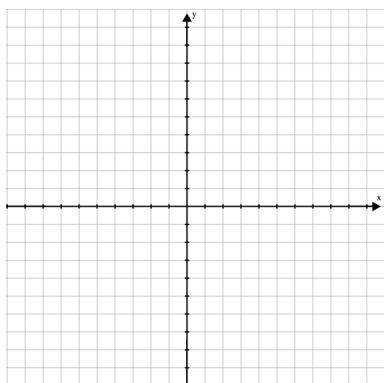


Peg på en skyder og flyt værdien vha. tastaturets højre- og venstre piletast.

Øvelse 3: Koefficienten a

Undersøg betydningen af koefficienten a for parablens udseende.

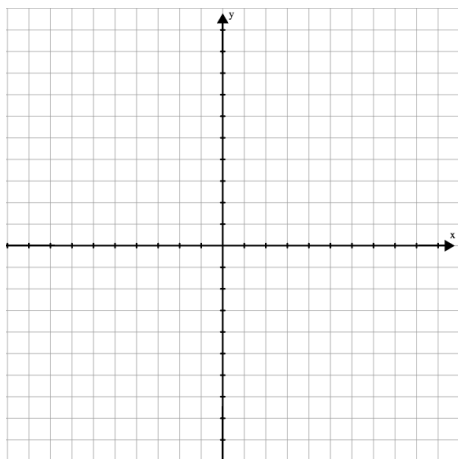
3.1. Tegn to mulige tilfælde for, hvordan parablens grene vender og påfør passende fortegn for a .



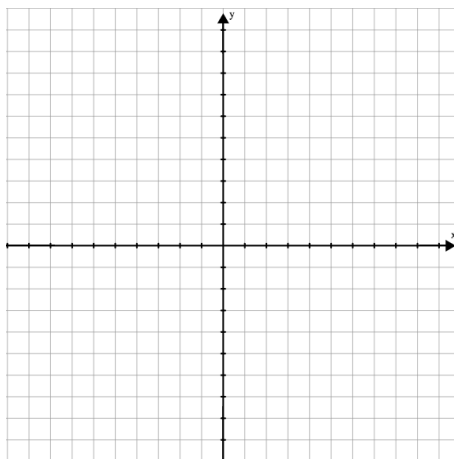
3.1. Hvilken bestemt værdi af a adskiller de mulige tilfælde? _____

3.3. Hvad sker der med parablens udseende, når værdien af a gøres større eller mindre?

Tegn eksempler for $a > 0$:



Tegn eksempler for $a < 0$:



Øvelse 4: Koefficienten c

Undersøg betydningen af koefficienten c for parablens udseende.

4.1. Formuler hvilken betydning koefficienten c har for parablens udseende.

4.2. Bevis denne påstand (Hjælp: Sæt $x=0$ ind i standardformen for et 2. gradspolynomium).

4.3. I hvilket punkt skærer en parabel generelt y-aksen?

Svar: (,)

4.4. I hvilket punkt skærer parablen for $f(x) = 5x^2 + 2x + 4$ y-aksen?

Svar: (,)

4.5. I hvilket punkt skærer parablen for $f(x) = x^2 + 4x - 3$ y-aksen?

Svar: (,)

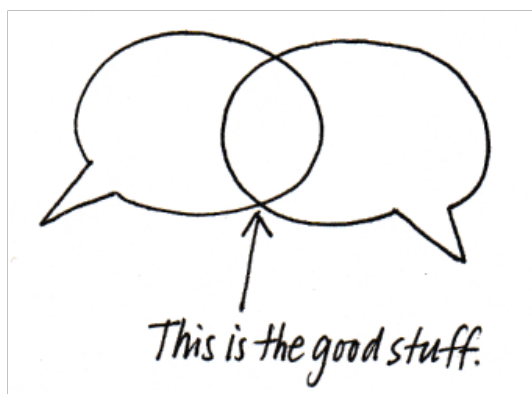
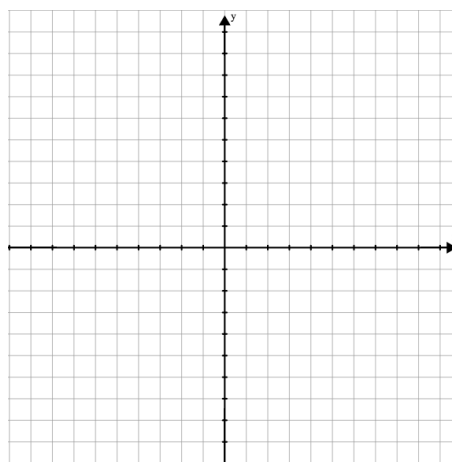
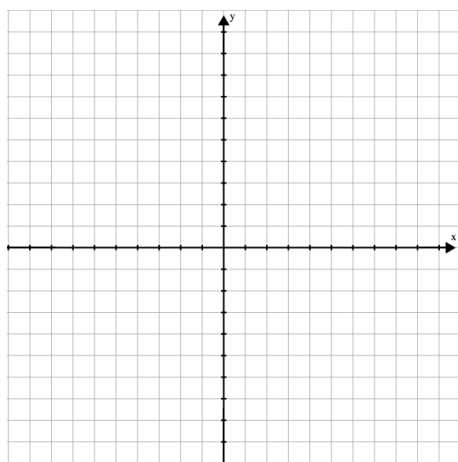
Øvelse 5: Koefficienten b

Undersøg betydningen af koefficienten b for parablens udseende.

5.1. Beskriv først, hvad en tangent er (brug f.eks. internettet):

5.2. Brug din parabel i TI-Nspire og kig på *skæringspunktet* $(0, c)$ mellem parablen og y-aksen. Sammenlign parablens hældning i dette punkt med værdien af b .

5.3. Tegn et par eksempler på en parabel med en tangent i punktet $(0, c)$ og anfør værdien af b :



SAMLET OVERSIGT OVER KOEFFICIENTERNES BETYDNING FOR ET 2. GRADSPOLYNOMIUM

Sætning 1: Betydningen af koefficienterne a , b og c i et andengradspolynomium $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Betydningen af a :

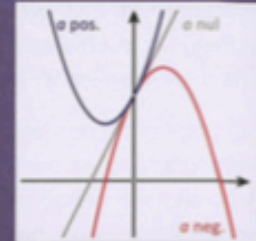
Fortegnet for a :

Hvis a er negativ, vender parabelgrenene nedad (parablen er *sur*).

Hvis a er nul, er der ikke tale om et andengradspolynomium.

Grafen udarter da til en ret linje.

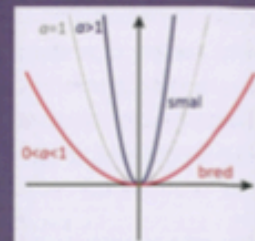
Hvis a er positiv, vender parabelgrenene opad (parablen er *glad*).



Størrelsen af a :

Hvis a ligger tæt på 0, er krumningen lille og parablen derfor meget bred.

Hvis a ligger langt fra 0, er krumningen stor og parablen derfor meget smal.



Betydningen af b :

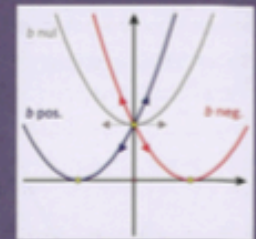
Koefficienten b angiver hældningskoefficienten for parablens tangent i punktet, hvor parablen skærer y -aksen.

Fortegnet for b :

Hvis b er negativ, er andengradspolynomiet aftagende omkring skæringspunktet med y -aksen.

Hvis b er nul, er hældningskoefficienten for tangenten i skæringspunktet nul, og parablen skærer y -aksen i sit toppunkt.

Hvis b er positiv, er andengradspolynomiet voksende omkring skæringspunktet med y -aksen.



Betydningen af c :

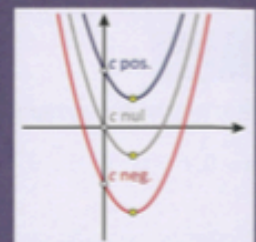
Parablen skærer y -aksen i punktet $(0, c)$.

Fortegnet for c :

Hvis c er negativ, skærer parablen y -aksen under x -aksen.

Hvis c er nul, går parablen gennem koordinatsystemets begyndelsespunkt $(0, 0)$.

Hvis c er positiv, skærer parablen y -aksen over x -aksen.



Øvelse 6: UDEN brug af TI-Nspire

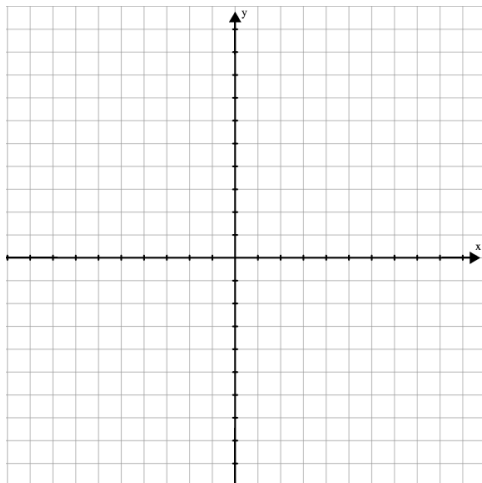
Skitsér grafen for et 2. gradspolynomium, der opfylder at

6.1.

$$a > 0$$

$$b > 0$$

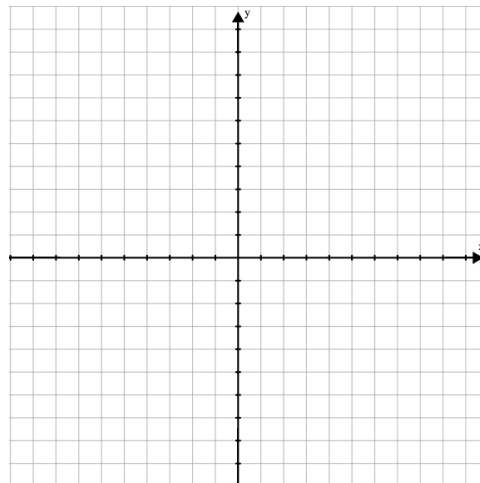
$$c > 0$$

**6.2.**

$$a < 0$$

$$b < 0$$

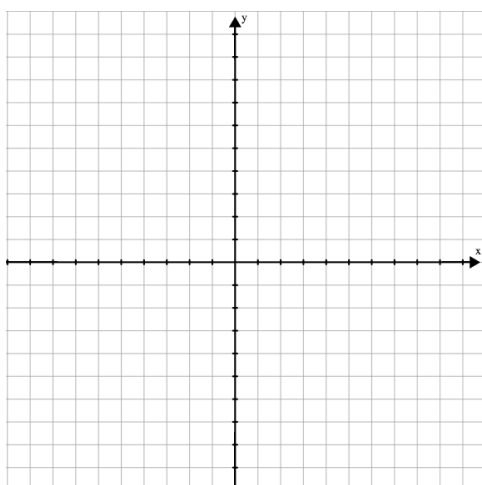
$$c > 0$$

**6.3.**

$$a > 0$$

$$b > 0$$

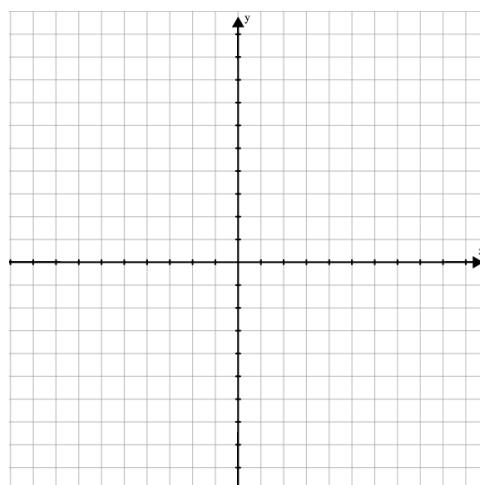
$$c < 0$$

**6.4.**

$$a < 0$$

$$b > 0$$

$$c > 0$$



Hjælp: placér først $(0, c)$ - bestem derefter hældningen i $(0, c)$ ud fra b - vend til sidst grenene korrekt ud fra a .

Øvelse 7: Mundtlig parøvelse

Arbejd sammen frem mod at kunne klare en individuel test i emnet *uden* hjælpemidler.



Uden noter skiftes I til at:

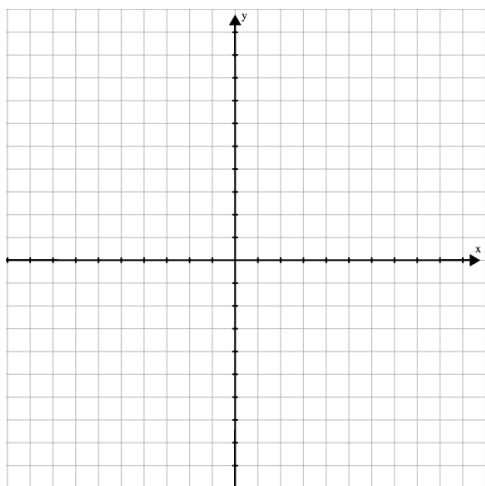
- redegøre for standardformen for et 2. gradspolynomium
- forklare betydningen af 2. gradspolynomiets koefficienter a , b og c for parablens udseende

Du bør nu kunne besvare en test med spørgsmål, som ligner dem nedenfor.

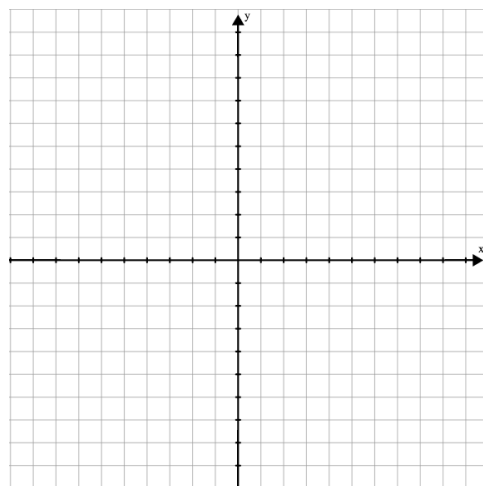
Øvelse 8: Test dig selv

Skitsér grafen for de angivne funktioner så præcist som muligt.

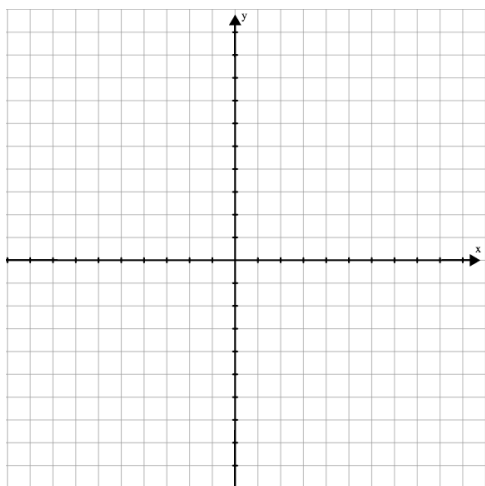
8.1. $f(x) = x^2 + 2x - 3$



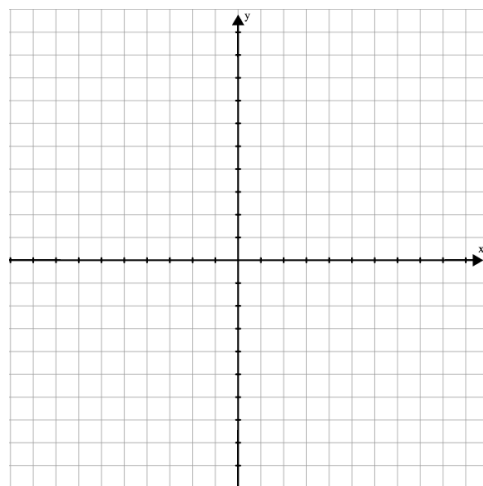
8.2. $f(x) = -2x^2 + x + 6$



8.3. $f(x) = -2x^2 - 3x + 1$



8.4. $f(x) = 3x^2 - x$



Hjælp: placér først $(0, c)$ - bestem derefter hældningen i $(0, c)$ ud fra b - vend til sidst grenene korrekt ud fra a .

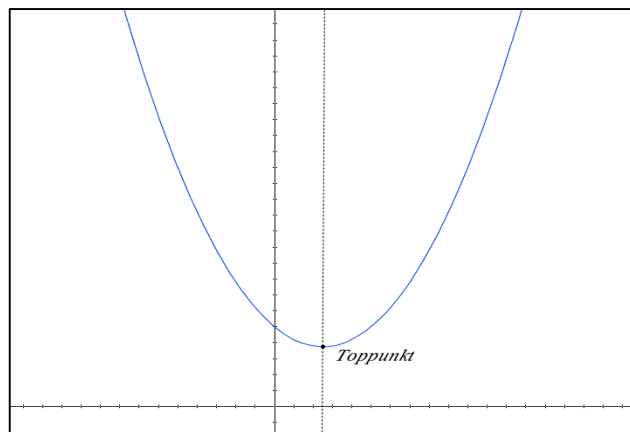
Svar på øvelsen kan ses på s. 37-38, men prøv lige selv først!

ANDENGRADSPOLYNOMIERS TOPPUNKTER**Definitioner:**

Figuren nedenfor viser en parabel med forskriften $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

På figuren er parablens såkaldte *toppunkt* markeret.

Toppunktet benævnes ofte T og dets koordinater benævnes ofte (x_T, y_T) .



Parablen er symmetrisk omkring den lodrette linje $x = \frac{-b}{2 \cdot a}$ som går gennem toppunktet. Denne lodrette linje kaldes parablens *symmetriakse*.

Parablen har toppunkt med koordinaterne: $(x_T, y_T) = (\frac{-b}{2 \cdot a}, \frac{-d}{4 \cdot a})$ hvor tallet d kaldes andengradspolynomiets *diskriminant*.

Diskriminanten er givet ved $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

Formlen for en parabels toppunkt kan bevises ved hjælp af differentialregning.

Øvelse 9 - uden lommeregner.

Givet andengradspolynomiet: $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$

Bestem først koefficienterne a , b og c . Bestem derefter diskriminanten d .

$a =$

$b =$

$c =$

$d =$

Øvelse 10 - uden lommeregner.

Givet andengradspolynomiet $f(x) = x^2 + 2x - 3$

Metode 1 til bestemmelse af parablens toppunkt:

Bestem diskriminanten d :

$$d =$$

Bestem koordinaterne til den tilhørende parabels toppunkt (x_T, y_T) :

$$x_T =$$

$$y_T =$$

Så parablens toppunkt bliver: $(x_T, y_T) = (\quad , \quad)$

Metode 2 til bestemmelse af parablens toppunkt:

Beregn førstekoordinaten som før:

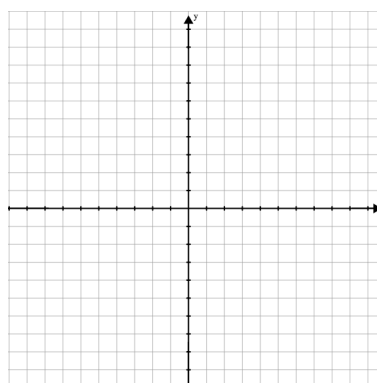
$$x_T = \frac{-b}{2 \cdot a} =$$

Indsæt herefter førstekoordinaten x_T på x 's plads i forskriften for f :

$$y_T = f(x_T) =$$

Hermed har du beregnet den y -koordinat y_T , som hører til x -koordinaten x_T .

Skitser parabelen ud fra a , b og c
og med korrekt toppunkt:



Når du fremover skal bestemme en parabels toppunkt, kan du vælge mellem disse metoder.
Fordelen ved metode 2 er, at du ikke skal beregne diskriminanten.

Øvelse 11 - uden lommeregner.

Givet andengradspolynomiet $f(x) = 4x^2 - 8x + 2$

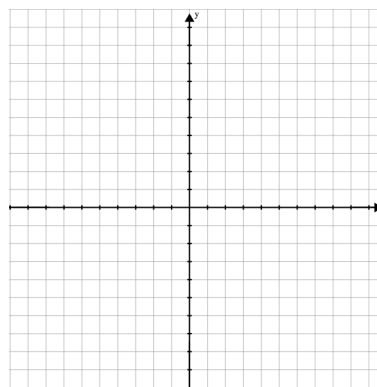
Bestem koordinaterne til den tilhørende parabels toppunkt (x_T, y_T) .

$$x_T =$$

$$y_T =$$

Så parablens toppunkt bliver: $(x_T, y_T) = (\quad , \quad)$

Skitser parabeln ud fra a , b og c
og med korrekt toppunkt:

**Øvelse 12 - uden lommeregner.**

Givet andengradspolynomiet $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$

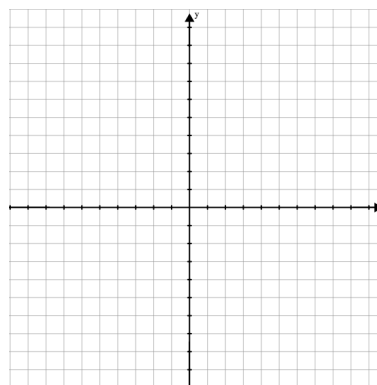
Bestem koordinaterne til den tilhørende parabels toppunkt (x_T, y_T) .

$$x_T =$$

$$y_T =$$

Så parablens toppunkt bliver: $(x_T, y_T) = (\quad , \quad)$

Skitser parabeln ud fra a , b og c
og med korrekt toppunkt:



Ekstra øvelse 1 med brøkgregning - uden lommeregner.

Givet andengradspolynomiet $f(x) = -2x^2 + x + 6$

Bestem koordinaterne til den tilhørende parabels toppunkt (x_T, y_T) .

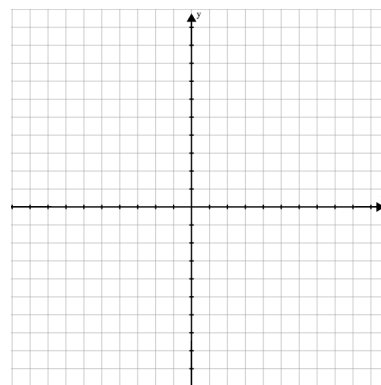
$$x_T =$$

$$y_T =$$

Så parablen's toppunkt bliver: $(x_T, y_T) = (\quad , \quad)$

Omregn toppunktet til decimaltal med lommeregner: $(\quad , \quad)$

Skitsér parablen så præcist som muligt:

**Ekstra øvelse 2 med brøkgregning - uden lommeregner.**

Givet andengradspolynomiet $p(x) = 4x^2 - 3x - 1$

Bestem koordinaterne til den tilhørende parabels toppunkt (x_T, y_T) .

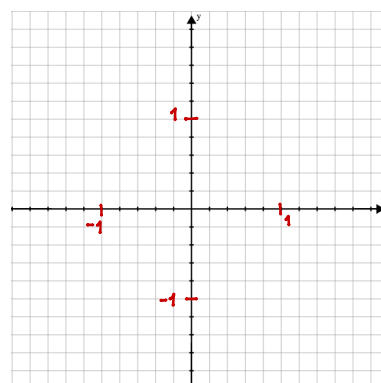
$$x_T =$$

$$y_T =$$

Så parablen's toppunkt bliver: $(x_T, y_T) = (\quad , \quad)$

Omregn toppunktet til decimaltal med lommeregner: $(\quad , \quad)$

Skitsér parablen så præcist som muligt:



EKSTRA MATERIALE - INDLEDENDE OPGAVER I LØSNING AF ANDENGRADSLIGNINGER

Hvis du er færdig med emnet *TOPPUNKTER*, arbejder du videre med denne side. Her trænes selvstændighed i udarbejdelse af løsninger til andengradsligninger ved brug af kvadratsætninger (som du herved også får repeteret).

Ekstra 3a) $x^2 = 16$

øvelse 3 3b) $x^2 = \frac{4}{9}$

3c) $x^2 = -9$

Ekstra Løsningsmetode: tag kvadratroden på begge sider af lighedstegnet.

øvelse 4 4a) $(x-3)^2 = 25$

4b) $(x+2)^2 = 16$

4c) $(x-4)^2 = 0$

Ekstra Løsningsmetode: omskriv venstre side vha. en *kvadratsætning*.

øvelse 5 Løs herefter ligningen som i opgave 2.

5a) $x^2 + 6x + 9 = 0$

5b) $x^2 - 4x + 4 = 25$

5c) $x^2 - 6x + 9 = 16$

5d) $2x^2 - 16x + 32 = 0$

Ekstra Løsningsmetode: omskriv venstre side vha. en *kvadratsætning*,

øvelse 6 og træk det overskydende led fra (se eksempel i opgave 4a)

6a) $x^2 + 6x = 7 \Rightarrow$

$(x + 3)^2 - 9 = 7$ Fortsæt selv herfra som i opgave 3.

6b) $x^2 - 8x = 9$

6c) $x^2 + 10x = -9$

Ekstra Forsøg dig frem og brug så samme metoder som ovenfor.

øvelse 7 7a) $x^2 - 2x - 8 = 0$

7b) $x^2 + 2x - 3 = 0$

7c) $2x^2 - 8x - 10 = 0$

7d) $3x^2 + 18x - 21 = 0$

PLADS TIL LØSNING AF EKSTRA ØVELSER

PLADS TIL LØSNING AF EKSTRA ØVELSER

ANDENGRADSLIGNINGER

En *andengradsligning* er en ligning på formen $ax^2 + bx + c = 0$.

Ligningen kaldes en andengradsligning, fordi højestegradsleddet er et andengradsled.

Andengradsligningen svarer til et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$, hvor funktionsværdien er sat lig med nul.

Løsning af en andengradsligning:

At løse en andengradsligning vil sige at finde alle de værdier af x , som gør ligningen sand.

Eksempel:

Vis at $x = -3$ er en løsning til andengradsligningen $x^2 + 6x + 9 = 0$

Indsæt tallet -3 på x 's plads i venstre side af ligningen - beregn og vis, at resultatet giver det, som står på højre side af lighedstegnet- altså nul.

$$(-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 9 = 9 - 18 + 9 = 0 \quad \checkmark$$

Øvelse 13

Vis at $x = 7$ er en løsning til andengradsligningen $x^2 - 6x - 7 = 0$

Øvelse 14

Undersøg om $x = 1$ er en løsning til andengradsligningen $x^2 - 10x + 9 = 0$

Øvelse 15

Undersøg om $x = -4$ er en løsning til andengradsligningen $3x^2 + 10x - 7 = 0$

Diskriminantmetoden:

Diskriminantmetoden anvendes til løsning af en andengradsligning.

At løse en andengradsligning vil sige at finde alle de værdier af x , som gør ligningen sand.

Givet en andengradsligning $ax^2 + bx + c = 0$ hvor $a \neq 0$

findes først diskriminanten d givet ved: $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

Værdien af diskriminanten d viser, hvor mange løsninger, der findes til 2. gradsligningen.

Her er tre muligheder:

hvis $d < 0$ findes *ingen* løsninger

hvis $d = 0$ findes én løsning: $x = \frac{-b}{2 \cdot a}$

hvis $d > 0$ findes to løsninger: $x = \frac{-b + \sqrt{d}}{2 \cdot a}$ og $x = \frac{-b - \sqrt{d}}{2 \cdot a}$

Eksempel på løsning af en andengradsligning:

Løs andengradsligningen $x^2 + 2x - 3 = 0$

Bestem koefficienterne: $a = 1$ $b = 2$ $c = -3$

Find diskriminanten:

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 - (-12) = 16$$

Da d er positiv, findes to løsninger til andengradsligningen.

Bestem x :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

Så løsningerne til andengradsligningen er $x = 1$ og $x = -3$

Løsningerne kontrolleres ved at sætte de fundne værdier af x ind i andengradsligningen:

$$x = 1 \text{ indsættes: } 1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 1 + 2 - 3 = 0 \quad \checkmark$$

$$x = -3 \text{ indsættes: } (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0 \quad \checkmark$$

De fundne løsninger er korrekte.

Øvelse 16 - uden lommeregner.

Løs andengradsligningen $x^2 - 4x + 3 = 0$ ved hjælp af diskriminantmetoden.

Bestem koefficienterne: $a =$

$b =$

$c =$

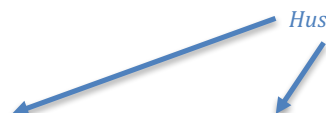
Find diskriminanten: $d =$

Er d positiv, nul eller negativ? _____

Hvor mange løsninger har andengradsligningen? _____

Bestem x :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a} =$$

 Husk at skrive: $x = \dots$

Så løsningerne til andengradsligningen er _____ og _____

Løsningerne kontrolleres ved at sætte de fundne værdier af x ind i andengradsligningen:

Indsæt $x =$ _____ :

Indsæt $x =$ _____ :

Var dine løsninger korrekte? _____

Øvelse 17 - uden lommeregner.

Løs andengradsligningen $2x^2 + 4x - 16 = 0$ ved hjælp af diskriminantmetoden.

Bestem koefficienterne: $a =$

$b =$

$c =$

Find diskriminanten: $d =$

Er d positiv, nul eller negativ? _____

Hvor mange løsninger har andengradsligningen? _____

Bestem x :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a} =$$

Så løsningerne til andengradsligningen er _____ og _____

Løsningerne kontrolleres:

Øvelse 18 - uden lommeregner.

Løs andengradsligningen $x^2 + 2x + 1 = 0$ ved hjælp af diskriminantmetoden.

Bestem koefficienterne:

Find diskriminanten:

Er d positiv, nul eller negativ ? _____

Hvor mange løsninger har andengradsligningen? _____

Bestem x :

Løsningen kontrolleres:

Ekstra øvelse 8 - uden lommeregner.

Træn hovedregning med større tal ved at løse andengradsligningen med diskriminantmetoden.

$$3x^2 + 24x + 21 = 0$$

Løsning af andengradsligninger ved hjælp af nulreglen

Når koefficienten c er nul, kan en andengradsligning løses *uden* brug af diskriminantmetoden, men i stedet ved brug af *nulreglen*.

Nulreglen siger, at *hvis et produkt af to faktorer er nul, så må mindst én af faktorerne være nul*.

Det skrives matematisk:

$$\begin{array}{ll} \text{hvis} & a \cdot b = 0 \\ \text{så} & a = 0 \quad \vee \quad b = 0 \end{array}$$

eller

Eksempel:

Løs andengradsligningen $x^2 - 6x = 0$

Her er $c = 0$

Sæt x uden for parentes: $x \cdot (x - 6) = 0$

faktor 1 faktor 2

Så må enten $x = 0$ eller $x - 6 = 0$

Løs $x - 6 = 0$

$$x = 6$$

Så løsninger til andengradspolynomiet er $x=0$ eller $x=6$

Øvelse 19 - uden lommeregner.

Løs andengradsligningen $-2x^2 + 3x = 0$ ved brug af *nulreglen* som ovenfor.

Øvelse 20 - uden lommeregner.

Løs andengradsligningen $14x^2 - 5x = 0$ ved brug af *nulreglen* som ovenfor.

Bevis for diskriminantmetoden.

Du har nu lært at løse andengradsligninger ved hjælp af diskriminantmetoden og eventuelt arbejdet med løsninger ved hjælp af kvadratsætningerne. Diskriminantmetoden kan bevises netop ved brug af kvadratsætninger.

Din lærer gennemgår relevante beviser i emnet andengradspolynomier. Et af dem kunne være nedenstående bevis for diskriminantmetoden:

Sætning:

En andengradsligning $ax^2 + bx + c = 0$ hvor $a \neq 0$

har løsningen:

ingen

hvis $d < 0$

$$x = \frac{-b}{2 \cdot a}$$

hvis $d = 0$

$$x = \frac{-b + \sqrt{d}}{2 \cdot a} \quad \text{og} \quad x = \frac{-b - \sqrt{d}}{2 \cdot a} \quad \text{hvis } d > 0$$

hvor diskriminanten er $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

Bevis:

Betragt en vilkårlig andengradsligning

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$$

$$4a \cdot (ax^2 + bx + c) = 4a \cdot 0 \quad \text{gang med } 4a \text{ på begge sider}$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2 \quad \text{læg } b^2 \text{ til på begge sider}$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \quad \text{træk } 4ac \text{ fra på begge sider}$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = d \quad \text{hvor } d = b^2 - 4ac$$

$$(2ax + b)^2 = d$$

Herefter ses tre muligheder:

Hvis $d < 0$: så har ligningen $(2ax + b)^2 = d$ ingen løsninger.

Der findes intet tal, som ganget med sig selv giver et negativt tal d .

Hvis $d = 0$: så fås ligningen $(2ax + b)^2 = 0$

$$2ax + b = 0$$

$$2ax = -b$$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Hvis $d > 0$: så fås ligningen $(2ax + b)^2 = d$

$$2ax + b = \sqrt{d} \quad \text{og} \quad 2ax + b = -\sqrt{d}$$

$$2ax = -b + \sqrt{d} \quad \text{og} \quad 2ax = -b - \sqrt{d}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} \quad \text{og} \quad x = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}$$

Øvelse 21 – skriftlig/mundtlig parøvelse

Arbejd med det bevis din lærer har udvalgt.



1. person: forklarer og skriver beviset ned UDEN noter.
2. person: giver stikord og hjælp ud fra noter og egen forståelse.
3. byt roller og gentag.

ANDENGRADSPOLYNOMIETS RØDDER (NULPUNKTER)

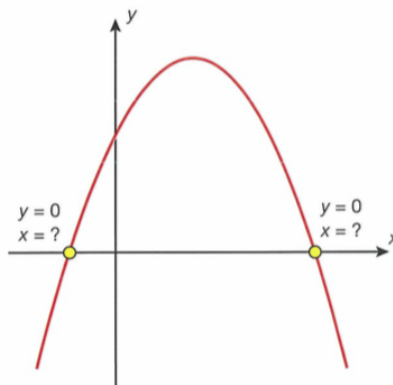
Når du er nået hertil i forløbsmaterialet, skulle du gerne være i stand til at løse en andengradsligning.

Når en andengradsligning løses, svarer det til at bestemme de x-værdier, hvor parablen for det tilsvarende andengradspolynomium skærer x-aksen. Førstekordinaterne for parablens skæringspunkt med x-aksen kaldes for andengradspolynomiets *rødder* eller *nulpunkter*, fordi $y=0$.

Et andengradspolynomiets rødder svarer til den tilhørende andengradslignings løsninger.

Man siger altså, at et andengradspolynomium har **rødder**,
og at en andengradsligning har **løsninger**, men værdier for disse er de samme.

Dette svarer til at betragte parablen der, hvor y-værdien (funktionsværdien) er nul.

**Eksempel – læs det grundigt!**

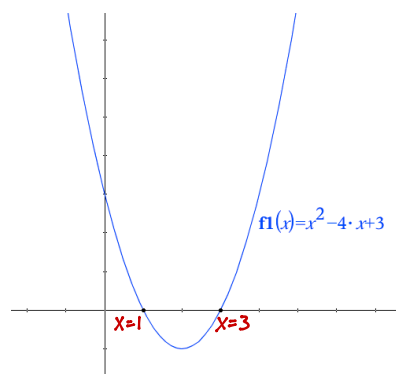
I øvelse 16 har du løst andengradsligningen $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Det tilsvarende andengradspolynomium er $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Parablen for f ses nedenfor.

At løse ligningen $x^2 - 4x + 3 = 0$,
svarer altså til at løse ligningen $f(x) = 0$.

Du fandt løsningerne $x=1$ og $x=3$.

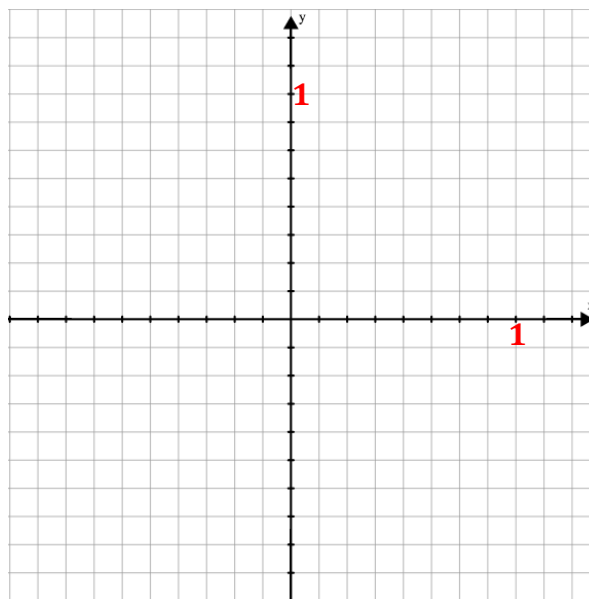
På parablen ses, at andengradspolynomiets
rødder (nulpunkter) er netop 1 og 3.



Øvelse 22 - uden lommeregner.

Bestem rødderne (nulpunkterne) til følgende andengradspolynomium $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$

Skitser grafen så nøjagtigt som muligt.



Andengradspolynomiets rødder (nulpunkter)

Et andengradspolynomiums **rødder** svarer til den tilhørende andengradslignings **løsninger**.

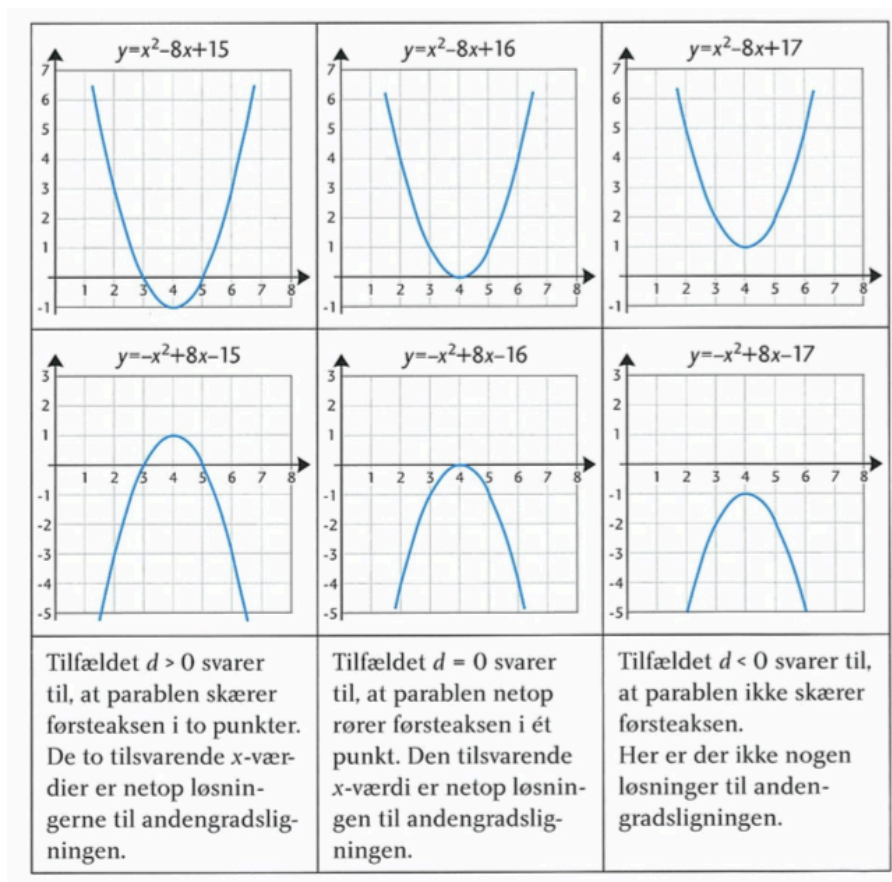
Givet et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$

svarer antallet af rødder til antallet af parablens skæringspunkter med x-aksen.

Der er tre muligheder:

- hvis $d < 0$ findes *ingen* rødder og parablen skærer ikke x-aksen
- hvis $d = 0$ findes *én* rod og parablen skærer x-aksen ét sted.
- hvis $d > 0$ findes *to* rødder og parablen skærer to steder.

Eksempler:



4

⁴ Clausen, Flemming m.fl.: Gyldendals gymnasie matematik B1 – Grundbog, Gyldendal s. 124

Øvelse 23 - uden lommeregner.

Afgør om tallet 2 er rod til andengradspolynomiet $f(x) = 3x^2 - 10x + 3$

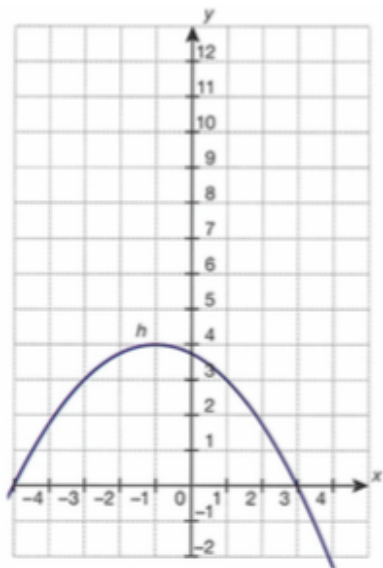
Hvis 2 er rod i andengradspolynomiet, vil funktionsværdien blive *nul*, når $x=2$ indsættes i forskriften.

Prøv:

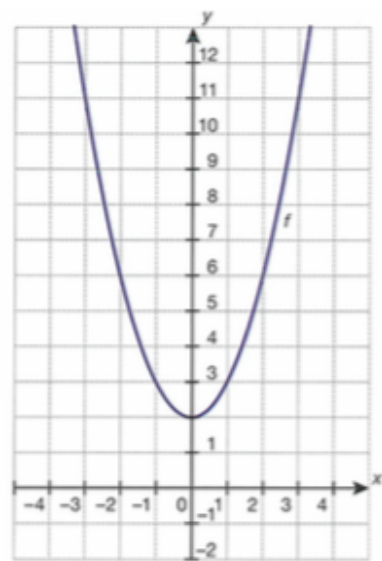
Er tallet 2 rod til $f(x) = 3x^2 - 10x + 3$? _____

Øvelse 24

Aflæs andengradspolynomiets rødder (nulpunkter) på følgende parabler:



Rødder:

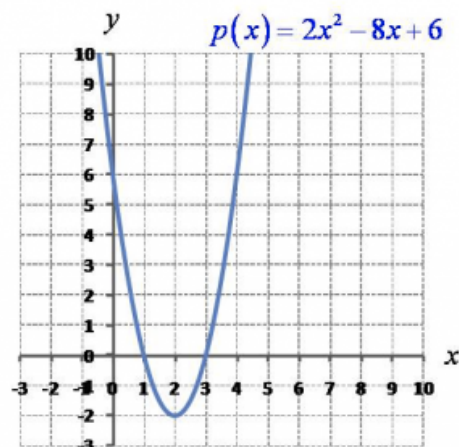


Rødder:

Øvelse 25

Kig på andengradspolynomiet $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ nedenfor. Hvad er løsningerne til

andengradsligningen $2x^2 - 8x + 6 = 0$? : _____



Faktorisering:

Et andengradspolynomium kan også opskrives på formen

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) , \quad \text{hvor } a \neq 0$$

hvor x_1 og x_2 er rødder. Rødderne kan også kaldes r_1 og r_2 .

Sammenlignet med standardformen, som består af *summen af tre led*, består formen i stedet af *faktorer, der ganges sammen*.

At *faktorisere* et andengradspolynomium betyder at *opskrive det ved hjælp af faktorer* på ovenstående form.

Eksempel: Her vises to forskellige måder at opskrive et andengradspolynomium på.

Givet $f(x) = 2x^2 + 4x - 16$.

Det vides fra øvelse 17 at løsningerne til den tilsvarende andengradsligning

$$2x^2 + 4x - 16 = 0 \quad \text{er } x = 2 \quad \text{og } x = -4.$$

Det vil sige, at andengradspolynomiets rødder er $x_1 = 2$ og $x_2 = -4$.

Andengradspolynomiet faktorerises:

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

$$f(x) = 2 \cdot (x - 2) \cdot (x - (-4))$$

$$f(x) = 2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 4)$$

Det vises nu, at sidste linje ovenfor er helt den samme funktion, som vi startede med øverst i dette eksempel. Parenteserne ganges sammen:

$$f(x) = 2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 4)$$

$$= 2 \cdot (x \cdot x + 4 \cdot x - 2 \cdot x - 2 \cdot 4)$$

$$= 2 \cdot (x^2 + 2x - 8)$$

$$= 2x^2 + 4x - 16$$

hvilket svarer funktionen f på standardformen vist øverst i eksemplet.

**Man kan altså opskrive et andengradspolynomium på to måder
– på standardformen eller ved hjælp af faktorisering.**

Øvelse 26 - uden lommeregner.

Find rødder til andengradspolynomier.

26.1 $f(x) = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$

Sammenlign med formen

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Der må så gælde at $a = 3$ og at rødderne er $x_1 = 1$ og $x_2 = -2$.

26.2 $f(x) = 2(x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

Rødderne er _____ og _____.

26.3 $f(x) = 4(x + 1)(x - 2)$

Rødderne er _____ og _____.

Løs nedenstående ligninger ud fra din viden om faktorisering.

Husk: **løsningerne** til en andengradsligning svarer til andengradspolynomiets **rødder**.

26.4 $3(x - 1)(x + 5) = 0$

Løsningerne er _____ og _____.

26.5 $(x + 3)(x + 1) = 0$

Løsningerne er _____ og _____.

26.6 $-3x(x + 2) = 0$

Løsningerne er _____ og _____.

Hvilken regel har du faktisk brugt ovenfor uden at skrive den ned? _____

Øvelse 27 - uden lommeregner.

Faktoriser andengradspolynomiet $p(x) = 2x^2 - 24x + 54$, som har rødderne $x_1 = 3$ og $x_2 = 9$.

Det vil sige, at du skal opskrive det på formen $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Tag herefter det faktorerede andengradspolynomium, du lige har fundet - gang parenteserne sammen og reducer indtil det ligner den oprindelige standardform.

Øvelse 28 - uden lommeregner.

Faktoriser andengradspolynomiet $g(x) = x^2 - 10x - 200$, som har rødderne $x_1 = -10$ og $x_2 = 20$.

Tag det faktorerede andengradspolynomium, du lige har fundet - gang parenteserne sammen og reducer indtil det ligner den oprindelige standardform.

TILLYKKE ☺

Du skulle nu være klar til en afsluttende test i emnet andengradspolynomier – herunder koefficienternes betydning, beregning af toppunkt, løsning af andengradsligninger, bestemmelse af rødder og faktorisering.

Ekstra øvelse 9: faktorisering

Et andengradspolynomium f har rødderne $x = -\frac{1}{2}$ og $x = 3$.

Parablen for f går gennem punktet $(1, -6)$.

Bestem koefficienten a .

Bestem herefter koefficienterne b og c .

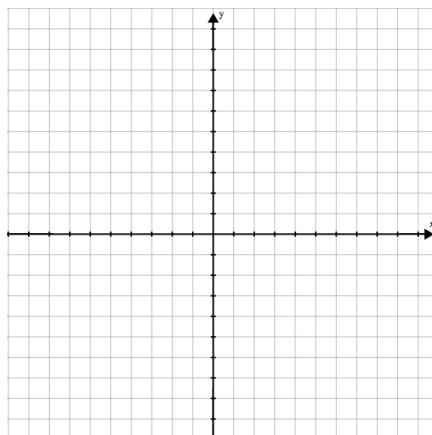
Ekstra øvelse 10: eksamensopgave

Om andengradspolynomiet

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

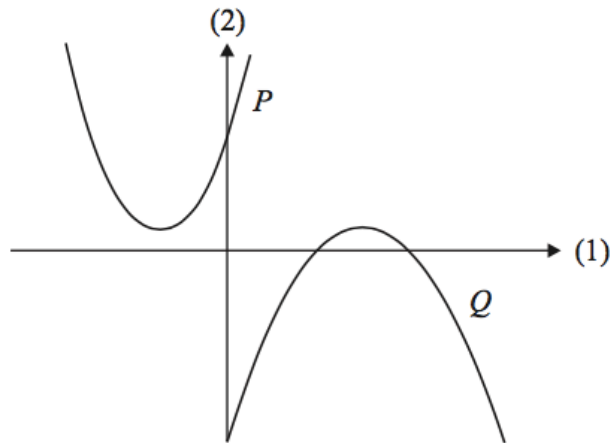
oplyses, at $c < 0$, samt at grafen for f har toppunkt i $T(3, 4)$.

Skitsér en mulig graf for f .



Ekstra øvelse 11: eksamensopgave

På figuren ses to parabler P og Q . Hver af parablerne er graf for en funktion af typen $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Gør rede for fortegnet for a og c samt diskriminanten d for hver af de to parabler.

Ekstra øvelse 12: eksamensopgave

Bestem tallet k , så andengradsligningen

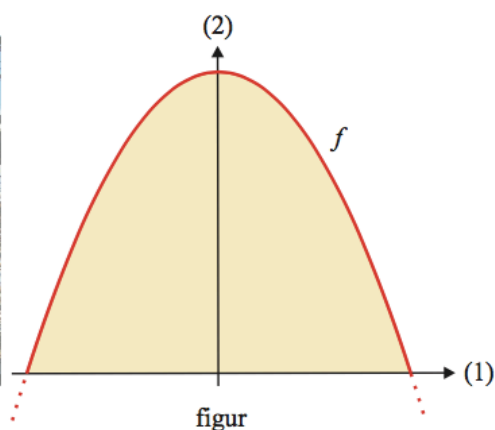
$$2x^2 - 3x + k = 0$$

har netop én løsning.

EKSTRA MATERIALE – EKSAMENSOPGAVER MED HJÆLPEMIDLER**A)**

Bestem koordinatsættet til toppunktet for den parabel, der er graf for funktionen

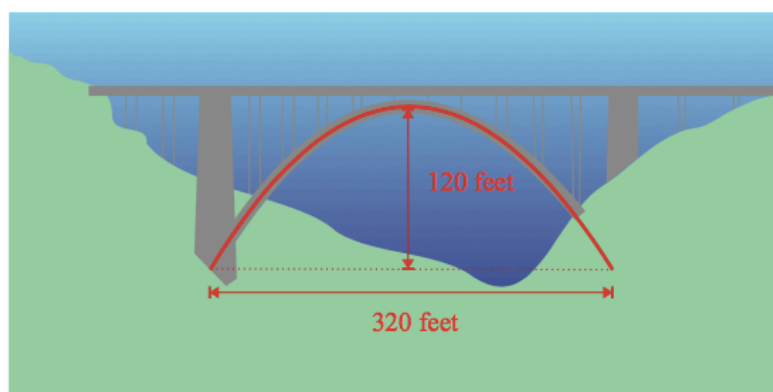
$$f(x) = -7x^2 + 28x + 25.$$

B)

På billedet ses en bygning, hvor facadens profil har form som en parabel (se figur). I et koordinatsystem med enheden 1 meter på akserne er facadens profil en del af grafen for funktionen

$$f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + 45.$$

a) Bestem facadens bredde og højde.

C)

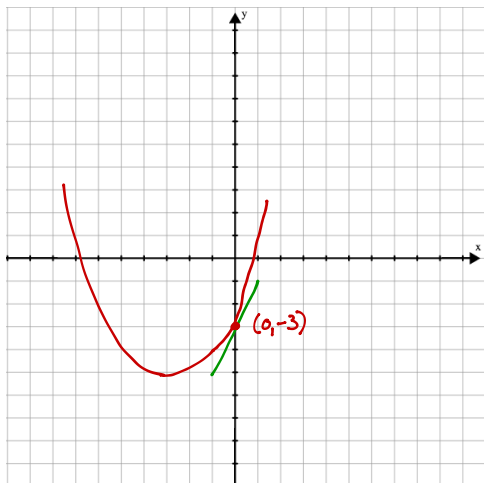
The Bixby Creek Bridge, Big Sur CA

På figuren ses en skitse af en bro i USA. Broens bue er parabelformet med en spændvidde på 320 feet og en buehøjde på 120 feet, som vist på modellen ovenfor.

a) Indlæg figuren i et passende koordinatsystem, og bestem en ligning for den parabel, der følger broens bue.

SVAR TIL ØVELSE 8

8.1. $f(x) = x^2 + 2x - 3$



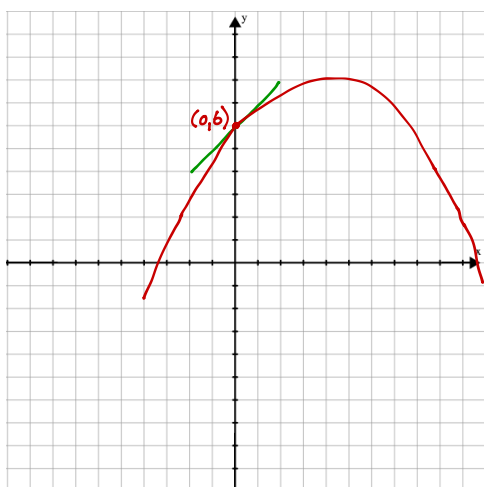
Anvend koefficienterne a , b og c

Da $c = -3$ skærer parablen y -aksen i $(0, -3)$.

Da $b = 2$ er tangentens hældning i $(0, -3)$ 2.

Da $a = 1$, altså positiv, vender parablens grene opad.

8.2. $f(x) = -2x^2 + x + 6$

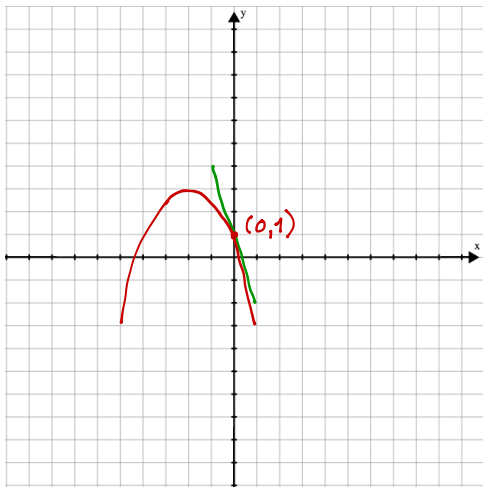


Da $c = 6$ skærer parablen y -aksen i $(0, 6)$.

Da $b = 1$ er tangentens hældning i $(0, 6)$ 1.

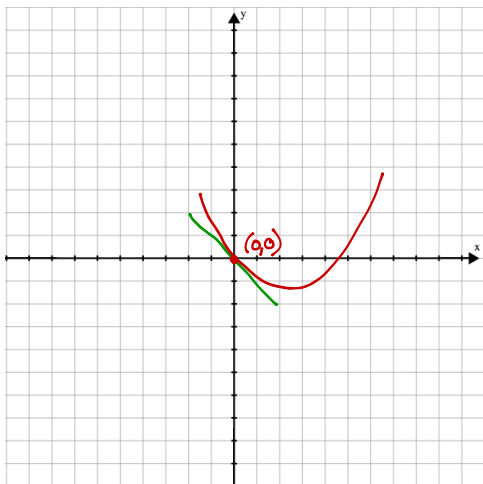
Da $a = -2$, altså negativ, vender parablens grene nedad.

8.3. $f(x) = -2x^2 - 3x + 1$



Da $c=1$ skærer parablen y-aksen i $(0,1)$.
Da $b=-3$ er tangentens hældning i $(0,1)$ -3 .
Da $a=-2$, altså negativ, vender parablens grene nedad.

8.4. $f(x) = 3x^2 - x$



Da $c=0$ skærer parablen y-aksen i $(0,0)$
Da $b=-1$ er tangentens hældning i $(0,0)$ -1 .
Da $a=3$, altså positiv, vender parablens grene opad.