

Dagens opgave:

To vektorer er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- Tegn $\vec{a}$, $\vec{b}$ og projektionen $\vec{b}_a$ af $\vec{b}$ på $\vec{a}$.
- Beregn projektionen $\vec{b}_a$ af $\vec{b}$ på $\vec{a}$.
- Er nogle af vektorerne på din skitse i delopgave a) parallelle eller ortogonale?
- *Tegn en vektor $\vec{c}$ på jeres skitse, som opfylder at $\vec{b} = \vec{b}_a + \vec{c}$.

Sætning:

Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er to egentlige vektorer, så er projektionen $\vec{b}_a$ af $\vec{b}$ på $\vec{a}$ givet ved

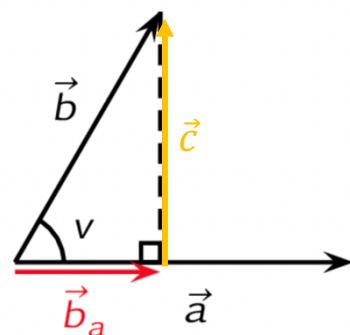
$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$$

Bevis:

Vi ved, at $\vec{b}_a$ og $\vec{a}$ er parallelle (se figuren). Derfor findes der et tal t , så

$$\vec{b}_a = t \cdot \vec{a}.$$

Nedenfor vil vi nu vise, at $t = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2}$. Når vi har vist dette, så er beviset færdigt.



Symbolsprog	Forklaring
$\vec{b} = \vec{b}_a + \vec{c}$	Hvis vi betragter figuren, kan vi se, at $\vec{b}_a$ og $\vec{c}$ ligger i forlængelse af hinanden, og $\vec{b}$ starter i begyndelsespunktet for $\vec{b}_a$ og slutter i slutpunktet for $\vec{c}$. Pr. definition af summen af to vektorer betyder det, at $\vec{b}$ er lig summen af $\vec{b}_a$ og $\vec{c}$.
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}_a + \vec{a} \cdot \vec{c}$	Vi prikker med $\vec{a}$ på begge sider af lighedstegnet.
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}_a$	Da $\vec{a}$ og $\vec{c}$ er ortogonale, så er $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$.
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot t\vec{a}$	Vi anvender, at vi tidligere i beviset argumenterede for at $\vec{b}_a = t \cdot \vec{a}$.
$\vec{a} \cdot \vec{b} = t\vec{a} \cdot \vec{a}$	Vi anvender en regneregul for prikproduktet, som siger, at $\vec{a} \cdot t\vec{a} = t\vec{a} \cdot \vec{a}$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = t \vec{a} ^2$	Vi anvender en regneregul for prikprodukt, som siger, at $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} ^2$.
$t = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} ^2}$	Vi isolerer t .

Bonusspørgsmål:

- Hvordan vil figuren se ud, hvis vinklen ν er stump? Gælder beviset også for en stump vinkel?
- Hvordan vil figuren se ud, hvis vinklen ν er ret? Gælder beviset også for en ret vinkel?