

Lærer besvarelse Mat 6

Opgave 1

En funktion f er givet ved

$$f(x) = (x^2 + 7)e^{4x}$$

a.) Vi bestemmer $f'(x)$ ved produktreglen

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot e^{4x} + (x^2 + 7) \cdot 4e^{4x} \\ &= e^{4x} \cdot (4x^2 + 2x + 28) \end{aligned}$$

Opgave 2

En funktion f er givet ved

$$f(x) = \ln(x) \cdot (5x^4 + 2)$$

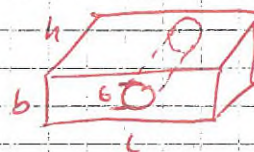
a.) Vi bestemmer $f'(1)$, først bestemmes $f'(x)$ ved produktreglen

$$f'(x) = \ln(x) \cdot 20x^3 + \frac{1}{x} \cdot (5x^4 + 2)$$

1 indsættes

$$\begin{aligned} f'(1) &= \ln(1) \cdot 20 \cdot 1^3 + \frac{1}{1} \cdot (5 \cdot 1^4 + 2) \\ &= 0 \cdot 20 + 1 \cdot (5 + 2) \\ &= 7 \end{aligned}$$

Opgave 3



Vi ønsker at bestemme

volumen af figuren bestående af en kasse med sidelængderne l , b og h og en cylinder udstøret med diameter 6 og højde h , først opstaves volumen af kassen

$$\begin{aligned} V_{\text{kasse}} &= l \cdot b \cdot h, \text{ dernæst af den} \\ \text{udstørte} \quad \text{cylinder} \quad V_{\text{cylinder}} &= \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot \left(\frac{6}{2}\right)^2 \cdot h \\ &= 9\pi h. \end{aligned}$$

Deffensen findes som er volumet af den udstørte kasse

$$V = V_{\text{kasse}} - V_{\text{cylinder}} = l b h - 9\pi h.$$

Opgave 4

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 + 1,5x^2 - 6x$$

a) Bestem monotoniforholdene for funktionen f

Først bestemmes $f'(x)$

$$f'(x) = 3x^2 + 3x - 6$$

Herefter løses $f'(x) = 0$ for at bestemme mulige ekstremumssteder

$$3x^2 + 3x - 6 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

Det er en andegrads ligning diskriminant-formelen benyttes

$$d = b^2 - 4ac$$

$$= 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

Da $d > 0$ er der to løsninger givet ved

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Der indsættes værdier i $f'(x)$ før, mellem og efter de mulige ekstremumssteder for at bestemme monotoniforholdene

$$f'(-3) = 3 \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3) - 6 = 27 - 15 = 12$$

$$f'(0) = -6$$

$$f'(2) = 3 \cdot (2)^2 + 3 \cdot (2) - 6 = 12 + 6 - 6 = 12$$

Fra monotonisætningen udledes det at

f er voksende i intervallet ~~$[-2; 1]$~~ $[-\infty; -2]$
og $[1; \infty]$

og at f er aftagende i intervallet $[-2; 1]$

Opgave 5

I en model er $T(x)$ en væskes temperatur i $^{\circ}\text{C}$ og x er tidspunktet i min

På bilaget ses grafen for T .

a) Vi ønsker at bestemme $T'(15)$.

Ved $x=15$ indtegnes en tangent til grafen for T , på denne aflæses to punkter

$Q(0, 82)$

$P(30, 26)$

ved topunkts formlen for lineære funktioner udregnes hældningskoefficienten som svarer til $T'(15)$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{26 - 82}{30 - 0} = \frac{-56}{30} = -\frac{56}{30} = -\frac{5,6}{3} \approx -1,9$$

$T'(15)$ er som betyder væskens temperatur aftager med $1,9^{\circ}\text{C/min}$ ved præcis 15 min

Opgave 6

Det oplyses at funktionen f opfylder

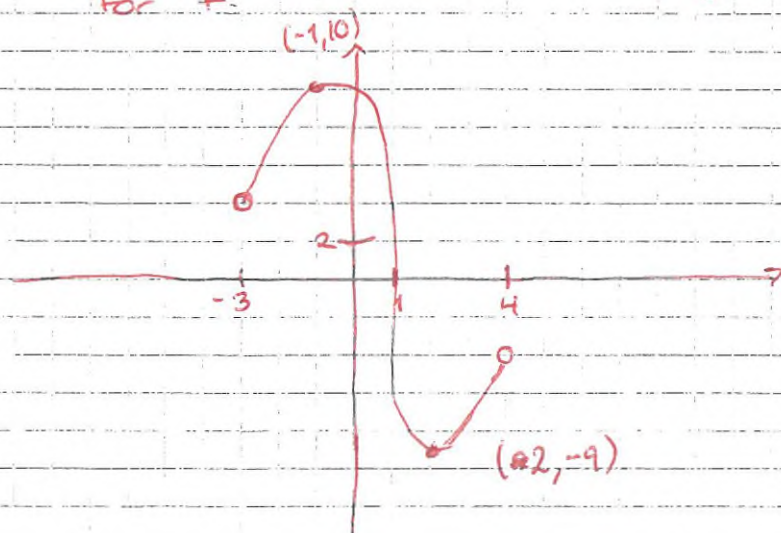
• $\text{Dom}(f) =]-3; 4[$: Forklaring hvilket betyder at f 's graf fra $x=-3$ til $x=4$ med åbne ender

• $f(-1) = 10$ og $f(2) = -9$: hvilket betyder at grafen for f skal gå igennem $(-1, 10)$ og $(2, -9)$

• $f'(x) = +, 0, -, 0, +$: hvilket betyder at f er voksende i $]-3; 1[$ og $[2; 4[$ da $f'(x) > 0$ i disse intervaller.

Der tegnes en mulig graf for f

f er aftagende i $[1; 2]$ da $f'(x) < 0$ i dette interval.



Opgave 7

To andengradspolynomier f og g er givet ved

$$f(x) = -x^2$$

$$g(x) = 2x^2 + bx + c$$

a.) Vi ønsker at bestemme ligningen for tangenten til f i punktet $P(1, f(1))$

Vi benytter formlen $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$
først bestemmes $f'(x)$

$$f'(x) = -2x$$

~~af~~ indsættes i $f'(x)$ og $f(x)$

$$f'(1) = -2 \cdot 1 = -2$$

$$f(1) = -1^2 = -1$$

Oplysningerne indsættes i formlen

$$y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1)$$

$$y = -2 \cdot (x - 1) + (-1)$$

$$= -2x + 2 - 1 = -2x + 1$$

Tangenten til grafen for f i $P(1, -1)$ har ligningen $y = -2x + 1$

Det oplyses at f og g har samme tangent i P

b.) bestem tallene b og c

ved ved at $f'(1) = g'(1) = -2$ og $f(1) = g(1) = -1$ da de har samme tangent i P
først differentieres g

$$g'(x) = 4x + b$$

Derefter løses ligningen $g'(1) = -2$ for b

$$-2 = 4 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = -6$$

Derefter løses ligningen $g(1) = -1$ med $b = -6$ indsat for c

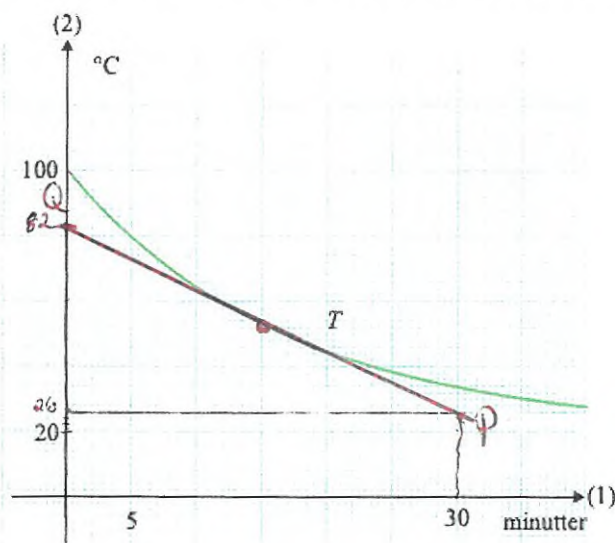
$$-1 = 2 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + c \Leftrightarrow -1 = -4 + c \Leftrightarrow c = 3$$

Så $b = -6$ og $c = 3$

Bilag 1

Opgave 5

I en model for afkøling af en væske betegner $T(x)$ væskens temperatur (målt i $^{\circ}\text{C}$) til tidspunktet x (målt i minutter). På grafen nedenfor ses en del af grafen for T .



- a) Benyt grafen til at bestemme $T'(15)$, og gør rede for, hvad dette tal fortæller om udviklingen i væskens temperatur.

Opgave 6

Det oplyses, at en differentiabel funktion f opfylder følgende:

- $\text{Dm}(f) =]-3, 4[$
- $f(-1) = 10$ og $f(2) = -9$
- fortegn og nulpunkter for f' er som angivet på tallinjen



- a) Tegn en mulig graf for funktionen f .

Opgave 7

To andengradspolynomier f og g er givet ved

$$f(x) = -x^2$$

$$g(x) = 2x^2 + bx + c.$$

- a) Bestem ligningen for tangenten til f i punkt $P(1, f(1))$.

Grafene for de to funktioner har en fælles tangent i punkt $P(1, f(1))$.



- b) Bestem tallene b og c .