LB

# Prøve i differentialregning

## Opgave 1

En funktion $f$ er bestemt ved

$$f(x) = x^3 + x^2 + 7.$$

a) Bestem $f'(x)$.

$f'(x) = 3x^2 + 2x$

## Opgave 2

En funktion $f$ er bestemt ved

$$f(x) = (x^3 + 2) \cdot e^{3x}.$$

a) Bestem $f'(x)$.

produktregel

$f'(x) = 3x^2 \cdot e^{3x} + (x^3+2) \cdot 3 \cdot e^{3x}$

$= e^{3x} \cdot (3x^3 + 3x^2 + 6)$

## Opgave 3

En funktion $f$ er bestemt ved

$$f(x) = x^4 + 5x.$$

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for $f$ i punktet $(1, f(1))$.

vi bruger formlen

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

vi bestemmer $f'(x)$

$f'(x) = 4x^3 + 5$

vi bestemmer $f'(1)$

$f'(1) = 4 \cdot 1^3 + 5 = 9$

vi bestem $f(1)$ $f(1) = 1^4 + 5 \cdot 1 = 6$

tallene indsættes i formlen.

$y = 9 \cdot (x - 1) + 6$

$= 9x - 9 + 6$

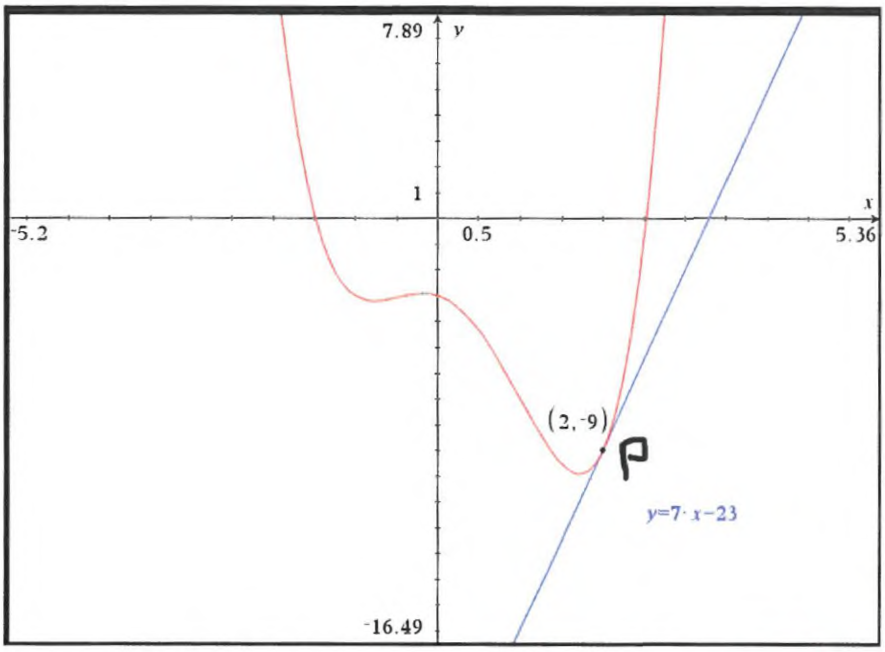
$= 9x - 3$

Tangenten til grafen for $f$ i $P(1,6)$ har ligningen

$y = 9x - 3$

## Opgave 4

På figuren ses grafen for en funktion $f$, samt en tangentlinje til grafen $f$ i punktet $P(x_0; f(x_0))$.




a) Bestem $x_0$, $f(x_0)$ og $f'(x_0)$.

Vi aflæser punktets koordinater til at være $(2,-9)$ og ser at $x_0 = 2$ og $f(2) = -9$, vi aflæser tangentens ligning til $y = 7x-23$ hvor $f'(2)$ svarer til tangentens hældning så $f'(2) = 7$

## Opgave 5

En funktion er givet ved

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4.$$

a) Bestem monotoniforholdene for $f$.

Først bestemmes $f'$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$f'(x) = 0$ løses for mulige lokale ekstremumssteder

$0 = 3x^2 - 6x - 9$

$0 = x^2 - 2x - 3$

diskriminantformlen benyttes

$d = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$

$d > 0$ to løsninger $\quad x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$

$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$

vi indsætter værdier før, mellem og efter de mulige ekstremumssteder for at finde fortegnet for $f'$

$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) - 9 = 12 + 12 - 9 = 15$

$f'(0) = -9$

$f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 - 9 = 15$

Vi ved at for $f' > 0$ er $f$ voksende og for $f' < 0$ er $f$ aftagende. Monotoniforholdene er som følger

f er voksende : intervallerne $]-\infty; -1]$ og $[3; \infty[$

f er aftagende : intervallet $[-1; 3]$

## Opgave 6

Det oplyses, at en differentiabel funktion $f$ opfylder følgende;

- Det oplyses at $f(-2) = -1$
- Fortegn og nulpunkter for $f'$ er som angivet på tallinjen

laves på sidste side.

| $x$: | | $-2$ | | $4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$: | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

a) Tegn en skitse af grafen for $f$.

## Opgave 7

En funktion $f$ er givet ved

$$f(x) = a \cdot x^2 + 4x + c$$

hvor $a$ og $c$ er tal. Det oplyses at $f'(1) = 6$ og at $f(2) = 4$.

a) Bestem tallene $a$ og $c$.

Først bestemmes $f'(x)$

$f'(x) = 2ax + 4$

så løses ligningen $f'(1) = 6$ for $a$

$f'(1) = 6$

$6 = 2a \cdot 1 + 4$

$6 = 2a + 4$

$6 - 4 = 2a$

$2 = 2a$

$1 = a$

Derefter løses ligningen $f(2) = 4$ for $c$ når $a = 1$ er indsat

$f(2) = 4 = 1 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + c$

$4 = 4 + 8 + c$

$4 - 12 = c$

$c = -8$

Vi har bestemt $a = 1$ og $c = -8$.

Opgave 6 vi får oplyst at en differentiabel funktion $f$ opfylder

$f(-2) = -1$ hvilket betyder at grafen ~~den~~ går igennem $(-2,-1)$. Udover det oplyses tallinjen/monotonilinjen

| $x$: | | $-2$ | | $4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$: | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

hvilket betyder $f$ er voksende i intervallet $[-2;4]$ og $f$ er aftagende i intervallerne $]-\infty;-2]$ og $[4;\infty[$, samt at $f$ har lokalt minimum i $x=-2$ og lokalt maksimum i $x=4$ dette skitseres nedenfor.