

KOMBINATORIK - TÆLLEPRINCIPPER

Additionsprincippet ("Enten-eller princippet")

Det samlede antal valgmuligheder ved et valg, hvor vi foretager ét af valgene $V_1, V_2, \dots, V_r$ er

$$n_1 + n_2 + \dots + n_r$$

Multiplikationsprincippet ("Både-og princippet")

Det samlede antal valgmuligheder ved et valg, hvor vi foretager valg ved alle valgene $V_1, V_2, \dots, V_r$ er

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$$

OPGAVE 1

På en restaurant kan du vælge mellem 12 pastaretter, 9 slags tilbehør, 15 slags drikkevarer og 8 forskellige desserter. Hvor mange menuer kan vi vælge imellem, når en menu består af én pastaret, tilbehør, drikkevarer og dessert?

Opskriv en beregning og notér hvilke/hvilket af ovenstående principper du anvender:

OPGAVE 2

På en anden restaurant kan du vælge mellem 4 forretter, 3 hovedretter og 5 slags desserter. Der er 2 muligheder for at vælge en menu: enten forret med hovedret eller hovedret med dessert. Hvor mange forskellige menuer kan laves?

Opskriv en beregning og notér hvilke principper fra s. 1, du anvender:

FAKULTET

Definition 7.2.1 ($n!$)

For ethvert naturligt tal n er $n!$ defineret ved

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Endvidere sætter vi

$$0! = 1$$

$n!$ udtales ” n fakultét”

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ osv.}$$

OPGAVE 3

a) $\frac{7!}{5!}$

b) $\frac{9!}{5!} =$

c) $\frac{6!}{3!} =$

d) $\frac{(n+1)!}{n!} =$

e) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!} =$

OPGAVE 4

I den italienske fodboldklub Juventus skal udtages en trup på 11 spillere, der skal på banen.

På hvor mange forskellige måder kan træneren placere de 11 spillere i opstillingen? (her antages det, at alle spillere kan klare alle pladser på banen: målmand, venstre back osv.)

PERMUTATIONER (RÆKKEFØLGEN ER VIGTIG)

Definition 7.2.2 (Permutation)

Givet en endelig mængde $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

En *permutation* af elementerne i A er en opstilling af elementerne i A i en bestemt rækkefølge.

Eksempel:

En mængde skrives med mængdeklammer $\{\dots\}$.

Den største mængde *du* kender inden for matematik, er mængden af alle de reelle tal $\mathbb{R}$.

En mængde A , som har tre elementer rød, gul og grøn kan skrives: $A = \{\text{rød}, \text{gul}, \text{grøn}\}$

OPGAVE 5

Antallet af permutationer angiver antallet af de **rækkefølger**, du kan opstille af de tre farver rød, gul og grøn:

Hvis rød kommer først, har du mulighederne:	rød	gul	grøn
	Rød	_____	_____
Hvis gul kommer først, har du mulighederne:	gul	_____	_____
	Gul	_____	_____
Hvis grøn kommer først, har du mulighederne:	grøn	_____	_____
	Grøn	_____	_____

Hvor mange permutationer (altså antal rækkefølger) findes i alt?: _____

r-permutation

Definition 7.2.4 (*r*-permutation i *n*-mængde)

Givet en *n*-mængde *A* og et helt tal *r*, $0 \leq r \leq n$.

En *r*-permutation af elementerne i *A* er en opstilling af *r* elementer fra *A* i én bestemt rækkefølge.

Eksempel:

I en mængde med 10 elementer, er en 4-permutation en bestemt rækkefølge af 4 elementer taget ud af de 10, som er i alt. Hvor mange 4-permutationer findes? Altså hvor mange forskellige rækkefølger af 4 elementer kan opstilles, når vi har 10 forskellige at vælge imellem? Det findes der en sætning for:

ANTAL R-PERMUTATIONER UD AF N MULIGE

Sætning 7.2.2 (Antal permutationer $P(n, r)$)

Givet en *n*-mængde *A* og et helt tal *r*, $0 \leq r \leq n$.

Så er antallet af *r*-permutationer $P(n, r)$ i *A*

$$P(n, r) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - (r - 1)) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

OPGAVE 6

Du har taget din telefon med til Rom. Et ringesignal på telefonen består af 3 forskellige toner udvalgt at stamtonerne c, d, e, f, g, a, h.

Hvor mange forskellige ringesignaler kan der laves ud af de 7 stamtoner?

Hint: brug teorien ovenfor.

OPGAVE 7

Du rejser i tog. I er i alt 12 personer, som skal afsted, men kun 3 af jer er heldige at kunne købe pladsbilletter til toget.

På hvor mange forskellige måder kan I fordele de 3 faste siddepladser imellem jer?

Hint: brug teorien ovenfor.

OPGAVE 8

Du tager til et galopløb (udelukkende fordi alt andet er Coronalukket). Der er 10 heste med i løbet, og der er pengepræmier til 1. pladsen og 2. pladsen.

På hvor mange måder kan pengepræmierne fordeles på?

Hint: brug teorien ovenfor.

KOMBINATIONER

Når **rækkefølgen er underordnet** tales om antal kombinationer (versus permutationer, hvor rækkefølgen har betydning).

r-kombination

Definition 7.3.1 (*r*-kombination af *n*-mængde)

Givet en *n*-mængde *A* og et helt tal *r*, $0 \leq r \leq n$.

En delmængde bestående af *r* elementer fra *A* kalder vi for *en r-del* *delmængde* af *A* eller *en r-kombination* af *A*.

OPGAVE 9

a) Opskriv antallet af **2-permutationer** ud af de tre mulige farver rød, gul og grøn:

Hvis rød kommer først, har du mulighederne:	rød	gul
	Rød	grøn
Hvis gul kommer først, har du mulighederne:	gul	_____
	Gul	_____
Hvis grøn kommer først, har du mulighederne:	grøn	_____
	Grøn	_____

Hvor mange permutationer (altså antal rækkefølger) findes i alt?: _____

Beregn også om antallet af passer med formelen for $P(n, r)$:

b) Opskriv nu antallet af **2-kombinationer**, du kan opstille af de tre farver rød, gul og grøn:

Hvis du bruger farven rød har du mulighederne:	rød	gul
	Rød	_____
Hvis du bruger farven gul har du muligheden:	gul	_____ (rød er brugt)

Når du vil vælge farven grøn, har du ingen muligheder, fordi både grøn-rød og grøn-gul er brugt.

Hvor mange kombinationer findes i alt?: _____

DER FINDES ALTSÅ FLERE ANTAL PERMUTATIONER END ANTAL KOMBINATIONER.

OPGAVE 10

Opskriv alle 2-kombinationer af mængden $A = \{a, b, 1, 2\}$

Opskriv med mængdetegn: $\{a, b\}$ osv.

Hint: der bør være 6 i alt.

OPGAVE 11

Opskriv alle 3-kombinationer af mængden $B = \{x, y, z, w\}$

Opskriv med mængdetegn: $\{x, y, z\}$ osv.

Hint: der bør være 4 i alt.

Antal r -kombinationer ud af n mulige**Sætning 7.3.1 (Antal r -kombinationer)**

Lad A være en n -mængde og r et helt tal, $0 \leq r \leq n$.

Så er antallet af r -kombinationer af A givet ved

$$K(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

OPGAVE 12

Beregn binomialkoefficienterne:

a) $K(8,2) =$

b) $K(12,8) =$

c) $K(5,4) =$

OPGAVE 13

En klasse er på tur med 29 elever. De skal vælge, hvem der skal være på et oprydningshold bestående af 4 personer.

På hvor mange måder kan klassen vælge oprydningsholdet?

Opskriv en beregning ved brug af teorien ovenfor.

OPGAVE 14

En klasse består af 13 piger og 16 drenge. Der skal nu udvælges 2 piger OG 3 drenge, som får lov at tage på tur. De andre skal vente på Peterspladsen.

På hvor mange måder kan klassen vælge gruppen, som skal på tur?

Hint: brug teorien om binomialkoefficienter OG teorien om valgmuligheder på side 1.

OPGAVE 15

Du spiller kort. På hvor mange måder kan du få en hånd, som består af 4 klør, 2 ruder, 6 hjerter og 1 spar?

Hint: brug teorien om binomialkoefficienter OG teorien om valgmuligheder på side 1.

OPGAVE 16

Du sidder i en skov og der kommer en flok dyr forbi

Flokken består af 10 får, 3 geder og 2 ulve.

På hvor mange måde kan vi vælge 6 dyr fra flokken, når

- a) du vælger mellem dyrene frit?

Hint: du skal vælge 6 dyr ud af hvor mange i alt? Brug teorien om binomialkoefficienten.

- b) de 2 ulve *skal* vælges?

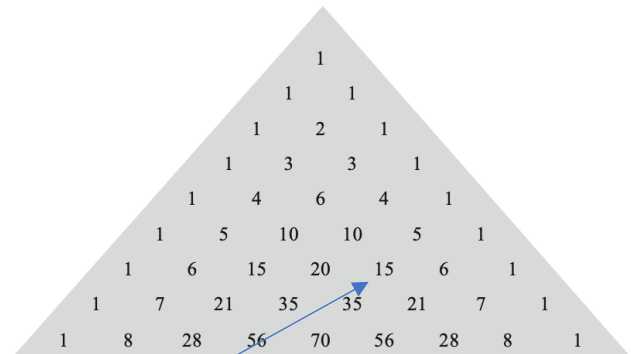
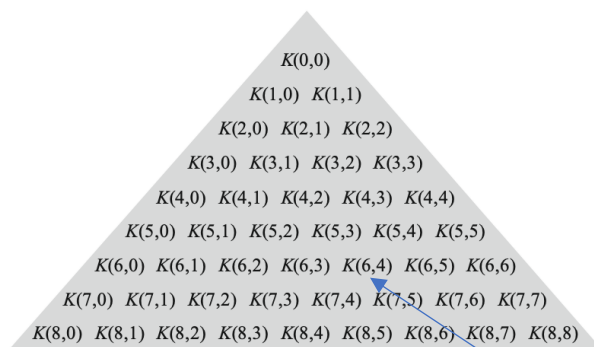
Hint: Lav først et valg af de 2 ulve ud af 2 ulve OG (multiplikationsprincip) derefter et valg af 6 dyr ud af de resterende dyr.

- c) de 2 ulve må *ikke* vælges?

Hint: Fjern de to ulve og brug binomialkoefficienten på de resterende dyr.

PASCALS TREKANT

I stedet for at beregne binomialkoefficienten $K(n,r)$ kan værdien aflæses i Pascals trekant. De viste trekanter er fra formelsamlingen.



Eksempel:

Du aflæser $K(6,4)$ som vist ved den blå pil. Altså $K(6,4) = 15$.

1. række fra oven viser $K(0,r)$
2. række fra oven viser $K(1,r)$
3. række fra oven viser $K(2,r)$ osv.

OPGAVE 17

- a) Aflæs $K(4,2) = \underline{\hspace{2cm}}$. Sæt ring om tallet nedenfor *uden* at kigge på trekanten til venstre ovenfor.
- b) Aflæs $K(8,2) = \underline{\hspace{2cm}}$. Sæt ring om tallet nedenfor *uden* at kigge på trekanten til venstre ovenfor.
- c) Aflæs $K(7,6) = \underline{\hspace{2cm}}$. Sæt ring om tallet nedenfor *uden* at kigge på trekanten til venstre ovenfor.
- d) Aflæs $K(3,0) = \underline{\hspace{2cm}}$. Sæt ring om tallet nedenfor *uden* at kigge på trekanten til venstre ovenfor.

