

---

# ARBEJDSARK: BINOMIALFORDELINGEN

Målet med dette arbejdsark er, at få indblik i en sandsynlighedsfordeling som kaldes binomialfordelingen. Sådant en fordeling kan f.eks. fortælle hvad sandsynligheden er for, at få plat 5 gange, hvis du spiller plat og krone fx 9 gange eller sandsynligheden for, at en medicinsk behandling (der virker med en given sandsynlighed) kan helbrede 4 ud af 10 patienter der modtager medicinen. Desuden kan vi bruge binomialfordelingen til at undersøge, om der er sket ændringer i stemmefordelingen siden et valg.

## BINOMIALFORDELINGEN

Vi skal se på såkaldte **Bernoulli-forsøg**, som har den egenskab, at der kun er to udfald; **succes** eller **fiasko**. Det kunne f.eks. være plat og krone eller kast med en terning, hvor succes så kunne være "at slå en 6'er" og fiasko ville så være "ikke at slå en 6'er". Hvis man gentager et Bernoulli-forsøg  $n$  gange, kaldes eksperimentet for et **binomialeksperiment**.

Vi indfører følgende begreber:

- **E: Basiseksperimentet**, det eksperiment man udfører  $n$  gange (f.eks. kast med en terning)
- **$n$ : Antallet af gentagelser** af forsøget
- **$p$ : Basissandsynligheden** (= sandsynligheden for succes), som er den samme for hver gang basiseksperimentet udføres (fx sandsynligheden for at slå en 6'er i et slag, altså  $1/6$ )
- **$r$ : Antallet af succeser**, når man udfører basiseksperimentet  $n$  gange (hvis man f.eks. slår 9 gange med en terning, så vil antallet af 6'ere beskrives med  $r$ )
- **$P(X = r)$**  angiver sandsynligheden for at få  $r$  succeser ud af  $n$  mulige

## ØVELSE 1

Vi kaster 5 gange med en 6-sidet terning og tæller antallet af seksere.

- Indfør en stokastisk variabel  $X$ , og skriv, hvad den tæller i dette eksperiment.
- Hvilke værdier kan  $X$  antage?
- Hvad er  $n$  og  $p$  i eksperimentet?

Vi vil gerne opskrive alle de muligheder vi har i de 5 kast for at få seksere.

Vi betegner det at få en sekser som succes (S) og det ikke at slå seks for fiasko (F). Et kast kunne være at vi fik en sekser i de 2 første kast og ikke-seksere i de 3 næste kast. Dette kast vil så se således ud: SSFFF.

Lad os skrive alle mulighederne op for de forskellige antal succeser (seksere) i 5 kast op i et skema, hvor S står for succes og F står for fiasko.

I kolonnen helt til højre skrives antallet af måder, vi kan få  $r$  antal succeser ud af de  $n$  gentagelser.

| $r$ = Antal succeser | Samtlige muligheder                                            | Antal kombinationer $K(n, r)$ |
|----------------------|----------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| 5                    |                                                                |                               |
| 4                    | SSSSF SSSFS SSFSS SFSSS FSSSS                                  | 5                             |
| 3                    |                                                                |                               |
| 2                    | SSFFF SFSFF SFFSF SFFFS FSFFS<br>FFSFS FFFSS FSSFF FFSSF FSFSF | 10                            |
| 1                    | SFFFF FSFFF FFSFF FFFSF FFFFS                                  | 5                             |
| 0                    | FFFFF                                                          | 1                             |

## ØVELSE 2

- Udfyld selv det der mangler i skemaet
- Beregn sandsynligheden for 5 succeser (altså  $P(X = 5)$ ) når vi **både** skal have succes i 1. kast **og** succes i 2. kast **og** succes i 3. kast **og** succes i 4. kast **og** succes i 5. kast.
- Beregn sandsynligheden for 4 succeser (**og** 1 fiasko) (altså  $P(X = 4)$ ). Her skal du også huske at gange med antallet af måder (kombinationer) for at få 4 succeser ud af de 5 kast.
- Beregn  $P(X = 3)$  efter samme princip som c)
- Beregn  $P(X = 2)$
- Beregn  $P(X = 1)$
- Beregn  $P(X = 0)$
- Læg alle sandsynlighederne sammen. Hvad giver det?

Ovenstående eksempel kan generaliseres til følgende:

### BINOMIALFORDELINGEN

Hvis et basiseksperiment E, med basissandsynlighed  $p$ , udføres  $n$  gange, kan sandsynligheden for at få  $r$  succeser beregnes vha. følgende formel:

$$P(X = r) = K(n, r) \cdot p^r \cdot (1 - p)^{n-r}$$

$n$  kaldes for antalsparameteren og  $p$  kaldes sandsynlighedsparameteren.

### ØVELSE 3

I vores simulering af eksperimentet med 10 kast, så vi hvordan de forskellige muligheder for antallet af 6'ere fordelte sig grafisk sammen med de frekventielle sandsynligheder. Vi vil nu beregne de teoretiske sandsynligheder i eksperimentet ved hjælp af binomialformlen (brug Nspire). For 10 kast med en terning skal nedenstående tabel udfyldes.

| Antal succeser $r$                                | 0 | 1     | 2 | 3 | 4     | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------------------------------------------------|---|-------|---|---|-------|---|---|---|---|---|----|
| Sandsynligheden for at få $r$ succeser $P(X = r)$ |   | 0,323 |   |   | 0,054 |   |   |   |   |   |    |

- Tegn et søjlediagram over sandsynlighedsfordelingen.
- Hvad er sandsynligheden for at få højst 2 6'ere ud af 10 slag? Dette skrives  $P(X \leq 2)$
- Hvad er sandsynligheden for at få 3 eller 4 6'ere ud af de 10 slag? Dette skrives  $P(3 \leq X \leq 4)$
- Hvad er det mest sandsynlige antal 6'ere ud af de 10 slag? Stemmer det overens med dit gæt fra i går?
- Sammenlign tabellen og søjlediagrammet med resultaterne af simuleringen. Er de ens? Hvorfor/hvorfor ikke?

I Nspire kan punktsandsynlighederne for binomialfordelingen udregnes med kommandoen  $\text{binompdf}(n,p)$  (for alle sandsynligheder skrevet ud som en liste på én gang) eller  $\text{binompdf}(n,p,r)$  for enkeltsandsynligheder  $P(X=r)$ .

Eksempel med terningekast 10 gange, hvor  $n=10$  og sandsynligheden for succes (=at få en sekser) er  $p=1/6$ .

Her udregnes  $P(X=4)$ .

$$\text{binomPdf}\left(10, \frac{1}{6}, 4\right) \rightarrow 0.054266$$

For kumulerede sandsynligheder (hvor vi lægger flere sandsynligheder sammen) bruges kommandoen  $\text{binomcdf}(n,p,\text{nedre grænse}, \text{øvre grænse})$

Eksempel med terningekast 10 gange, hvor  $n=10$  og sandsynligheden for succes (=at få en sekser) er  $p=1/6$ .

Her udregnes hvor stor sandsynligheden er for at få mellem 4 og 10 seksere eller sagt på en anden måde: sandsynligheden for at antallet af seksere er mindst 4, som skrives  $P(X \geq 4)$ .

$$p(x \geq 4) = \text{binomCdf}\left(10, \frac{1}{6}, 4, 10\right) \\ \rightarrow p(x \geq 4) = 0.069728$$

## OPGAVER HVOR BINOMIALFORMLEN SKAL ANVENDES – EKSEMPLER PÅ EKSAMENSOPGAVER.

### OPGAVE 1

Af den danske befolkning har 64 % blå øjne. Blandt danskere udtages en tilfældig stikprøve på 250 personer.

- Indfør en passende stokastisk variabel  $X$ , og opstil en binomialmodel for antallet af danskere med blå øjne i stikprøven.
- Opstil en formel til beregning af sandsynligheden for, at der er præcis 150 danskere med blå øjne i stikprøven.

Hjælp til at læse opgaven:

- Det oplyses, at der er tale om en binomialmodel dvs. der er to mulige udfald succes og fiasko. Hvad er succes i dette tilfælde (se efter hvad vi tæller i eksperimentet)? Dette er den stokastiske variabel, og vi skriver  $X$  er antallet af....  
 $X \sim b(n, p)$  (Dette betyder, at den stokastiske variabel  $X$  er binomialfordelt med antalsparameter  $n$  og basissandsynlighed  $p$  – indsæt tal i stedet for  $n$  og  $p$  i opgaven).
- At opstille en binomialmodel betyder, at du skal indsætte kendte værdier for  $n$  og  $p$  i binomialformlen. Antallet af succeser skal bare være  $r$ , så man kan bruge formelen på alle mulige antal succeser.
- Overvej, hvordan man oversætter "sandsynligheden for, at der er præcis 150 danskere med blå øjne" til matematik og indsæt i formelen i opgave a).

### OPGAVE 2

På et æggepakkeri har det vist sig, at 1 æg ud af 20 har to blommer.

Æggene pakkes i bakker med 30 æg i hver bakke.

Den stokastiske variabel  $X$  betegner antallet af æg med to blommer i en tilfældigt valgt bakke med 30 æg.

- Bestem antalsparameteren og sandsynlighedsparameteren for  $X$ .
- Bestem sandsynligheden for, at der blandt 30 tilfældigt valgte æg er mere end ét æg med to blommer.
- Bestem middelværdi og spredning for  $X$ .

OBS!! Formlen for middelværdi og spredning findes i jeres formelsamling under binomialfordelingen.

### OPGAVE 3

Der kastes med en symmetrisk terning. Det gælder om at slå seksere.

- Bestem sandsynligheden for, at få 2 eller flere seksere i en serie på 12 kast.
- Hvor mange kast skal der mindst være i serien, for at sandsynligheden for at få 2 eller flere seksere i serien kommer over 95 %.