

1. STAMFUNKTION OG INTEGRAL

I differentialregningskapitlerne i *MAT A2 stx* udviklede vi en omfattende teori for, hvordan man bestemmer en funktions afledede $f'(x)$. I integralregningen er man interesseret i at løse det modsatte problem: Når den afledede funktion $f'(x)$ er kendt, ønsker vi at bestemme den oprindelige funktion $f(x)$. Integralregning er således en slags 'baglæns' differentialregning,

Hvor differentialregningen bl.a. kan bruges til at bestemme tangenter og løse optimeringsproblemer, kan integralregningen bruges til at beregne arealet under kurver og mellem kurver. Integralregningen kan også bruges til at bestemme rumfanget af den figur, der fremkommer, når en kurve drejes 360° om x-aksen.

Differentialregning og integralregning udgør tilsammen det, der kaldes for *infinitesimalregning*. Infinitesimalregningen blev især udviklet af Isaac Newton (1642-1727) og Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). De udviklede den sideløbende, men hver for sig.

DETTE KAPITEL

Vi indfører begreberne *stamfunktion* og *ubestemt integral*. Derudover udledes de vigtigste regneregler for ubestemte integraler.

1.1 STAMFUNKTION OG UBESTEMT INTEGRAL

Vi indfører med følgende definition begrebet *stamfunktion*, som kan opfattes som det omvendte af den afledede funktion:

DEFINITION 1 (STAMFUNKTION)

Funktionen $F(x)$ kaldes en *stamfunktion* til $f(x)$, hvis $F'(x) = f(x)$.

EKSEMPEL 1

Funktionen $F(x) = x^3 + 4x^2 - 5$ er stamfunktion til $f(x) = 3x^2 + 8x$, fordi

$$F'(x) = 3x^2 + 8x = f(x).$$

Funktionen $G(x) = x^3 + 4x^2 + 10$ er ligeledes stamfunktion til $f(x)$, fordi

$$G'(x) = 3x^2 + 8x = f(x).$$

Funktionen $H(x) = x^4 + x^2 + 3x - 1$ er ikke stamfunktion til $f(x)$, da

$$H'(x) = 4x^3 + 2x + 3 \neq f(x).$$

EKSEMPEL 2

Vi vil undersøge, om $F(x) = 2x^5 - \ln x + x^2 - 7$ er stamfunktion til $f(x) = 10x^4 - \frac{1}{x} + 2x$. Dette undersøges ved at differentiere $F(x)$ og se, om dens afledede er $f(x)$:

$$F'(x) = 2 \cdot 5x^4 - \frac{1}{x} + 2x = f(x).$$

Da $F'(x) = f(x)$, er $F(x)$ stamfunktion til $f(x)$.

Vi har i eksempel 2 gjort brug af den såkaldte *integrationsprøve* til at afgøre, om $F(x)$ er stamfunktion til $f(x)$. Integrationsprøven består i, at man differentierer stamfunktionen og ser, om det giver den påståede afledede funktion.

EKSEMPEL 3

Vi vil undersøge, om funktionen $G(x) = \ln(x^2 + 5)$ er stamfunktion til $g(x) = \frac{2x}{x^2+5}$. Vi gør brug af integrationsprøven og skal derfor differentiere $G(x)$.

$G(x)$ er en sammensat funktion med indre funktion $x^2 + 5$ og ydre funktion $\ln x$. Vi differentierer ved brug af reglen for sammensatte funktioner og får, at

$$G'(x) = \frac{1}{x^2 + 5} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 5} = g(x).$$

Integrationsprøven viser, at $G(x)$ er stamfunktion til $g(x)$.

I eksempel 1 så vi, at en funktion kan have mere end én stamfunktion. Dette skyldes, at konstanter afledede er 0. Hvis funktionen $F(x) = x^3 + 4x^2 - 5$ er stamfunktion til $f(x) = 3x^2 + 8x$, er enhver funktion af typen $F(x) = x^3 + 4x^2 + k$, hvor k er en konstant, også stamfunktion til $f(x)$. Vi formulerer følgende sætning:

SÆTNING 1

Hvis $F(x)$ er stamfunktion til $f(x)$, er enhver funktion af typen $G(x) = F(x) + k$, hvor k er en konstant, også en stamfunktion til $f(x)$.

BEVIS

Vi antager, at funktionen $F(x)$ er stamfunktion til $f(x)$. Vi skal nu vise, at funktionen $G(x) = F(x) + k$, hvor k er en konstant, også er stamfunktion til $f(x)$.

Vi benytter integrationsprøven og bestemmer derfor den afledede af $G(x)$. Undervejs bruger vi reglen for differentiation af en sum, og at konstanter afledede er 0:

$$G'(x) = (F(x) + k)' = F'(x) + 0 = f(x).$$

Da $G'(x) = f(x)$ kan vi slutte, at $G(x)$ også er stamfunktion til $f(x)$.

Hvis det er muligt at bestemme en stamfunktion $F(x)$ til $f(x)$, kan vi således bestemme uendeligt mange andre stamfunktioner ved blot at lægge konstanter til $F(x)$. Men kunne det tænkes, at der er andre stamfunktioner til $f(x)$ end lige netop funktioner af typen $F(x) + k$?

Det viser sig, at alle stamfunktioner er identiske på nær en konstant. Vi formulerer dette i følgende sætning:

SÆTNING 2

Hvis $F(x)$ og $G(x)$ begge er stamfunktioner til $f(x)$, så er $F(x) = G(x) + k$.

BEVIS

Vi antager, at funktionerne $F(x)$ og $G(x)$ begge er stamfunktioner til funktionen $f(x)$. Vi skal ud fra denne antagelse vise, at $F(x) = G(x) + k$.

At $F(x)$ og $G(x)$ begge er stamfunktioner til $f(x)$, betyder, at $F'(x) = f(x)$ og at $G'(x) = f(x)$. Vi foretager følgende omskrivninger ved brug af reglen om differentiation af sum/differens:

$$F'(x) = G'(x) \Leftrightarrow F'(x) - G'(x) = 0 \Leftrightarrow (F(x) - G(x))' = 0.$$

På venstre side af lighedstegnet står nu den afledede funktion af funktionen $F(x) - G(x)$. Da denne funktions afledede er 0, må funktionen være konstant, og vi har derfor, at

$$F(x) - G(x) = k \Leftrightarrow F(x) = G(x) + k.$$

Vi har nu vist, at to forskellige stamfunktioner $F(x)$ og $G(x)$ er identiske på nær en konstant.

Sætning 1 og 2 er tilsammen to vigtige sætninger. Indholdet af sætningerne kan sammenfattes som følger: Hvis $F(x)$ er stamfunktion til $f(x)$, så findes der uendelig mange andre stamfunktioner, og alle disse stamfunktioner er af typen $F(x) + k$.

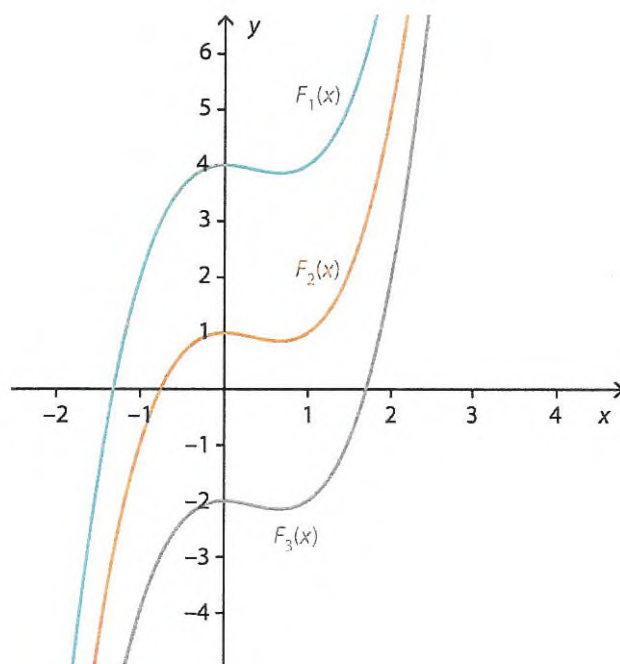
EKSEMPEL 4

Funktionen $F(x) = x^3 + x^2$ er stamfunktion til $f(x) = 3x^2 + 2x$. I følge sætning 1 er enhver funktion af typen $F(x) = x^3 + x^2 + k$ også stamfunktion til $f(x)$, og i følge sætning 2 er det *kun* funktioner af denne type, der kan være stamfunktioner til $f(x)$.

Tre forskellige stamfunktioner til $f(x)$ er

$$F_1(x) = x^3 + x^2 + 4, \quad F_2(x) = x^3 + x^2 + 1, \quad F_3(x) = x^3 + x^2 - 2.$$

På figur 1 ses graferne for F_1 , F_2 og F_3 . Bemærk, at graferne fremkommer af hinanden ved lodret parallelforskydning.



Figur 1

UBESTEMT INTEGRAL

Der knytter sig en særlig notation og sprogbrug til stamfunktioner. For at angive, at funktioner af typen $F(x) = x^3 + k$ er stamfunktion til $f(x) = 3x^2$, benyttes skrivemåden

$$\int 3x^2 dx = x^3 + k.$$

Udtrykket $\int 3x^2 dx$ læses 'det ubestemte integral af $3x^2$ '. Tegnet $\int$ kaldes for et *integraltegn*, og $3x^2$ kaldes for *integranden*. Skrivemåden ' dx ' til sidst i integralet angiver, at integralet slutter, og at det er x , der er den variable.

Stamfunktioner til $f(x)$ betegnes således med $\int f(x) dx$. Vi sammenfatter i følgende definition:

DEFINITION 2 (UBESTEMT INTEGRAL)

Hvis $F(x)$ er stamfunktion til $f(x)$, skriver vi, at $F(x) = \int f(x) dx$. Der gælder således følgende:

$$F(x) = \int f(x) dx \Leftrightarrow F'(x) = f(x).$$

$\int f(x) dx$ kaldes for *det ubestemte integral* af $f(x)$, og $f(x)$ kaldes for *integranden*.

Når vi bestemmer stamfunktioner, siger vi, at vi *integrerer*. Hvis vi f.eks. vil integrere funktionen $f(x) = 2x$, skal vi bestemme en stamfunktion $F(x)$. Dette skrives på følgende måde:

$$F(x) = \int f(x) dx = \int 2x dx = x^2 + k.$$

Vi siger, at vi har *integreret* $f(x) = 2x$.

I tabellen nedenfor er anført stamfunktioner for en række vigtige funktioner. I højre side af tabellen er sammenhængen mellem afledet funktion og stamfunktion udtrykt ved brug af ubestemte integraler. Resultaterne i tabellen kan kontrolleres ved brug af integrationsprøven.

Funktion $f(x)$	Stamfunktion $F(x)$	Ubestemt integral
0	k	$\int 0 dx = k$
a	$ax + k$	$\int a dx = ax + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$	$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + k$
x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + k, a \neq -1$	$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + k, a \neq -1$
$\frac{1}{x}, x > 0$	$\ln x + k, x > 0$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + k, x > 0$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + k$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$	$\int \sin x dx = -\cos x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$	$\int \cos x dx = \sin x + k$
e^x	$e^x + k$	$\int e^x dx = e^x + k$
e^{kx}	$\frac{1}{k} \cdot e^{kx} + c$	$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} \cdot e^{kx} + c$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + k = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + k$	$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + k = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + k$
$\ln x$	$x \ln x - x + k$	$\int \ln x dx = x \ln x - x + k$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + k$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + k$

Man kan naturligvis også bestemme stamfunktioner for andre og mere komplicerede funktioner end dem, der fremgår af tabellen ovenfor. Det er imidlertid ikke alle funktioner, der har en stamfunktion. Der gælder følgende sætning, som vi ikke beviser:

SÆTNING 3

Enhver funktion, der er kontinuert i et interval, har en stamfunktion.

1.2 REGNEREGLER FOR UBESTEMTE INTEGRALER

Der gælder følgende regneregler for ubestemte integraler:

SÆTNING 4

Hvis $f(x)$ og $g(x)$ er kontinuerte funktioner med samme definitionsområde, og k er en konstant, gælder følgende:

$$1) \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

$$2) \int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx.$$

$$3) \int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx.$$

BEVIS

I følge definition 2 gælder det, at

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

For at bevise regneregler 1, skal vi vise, at $\int f(x) dx + \int g(x) dx$ er stamfunktion til $f(x) + g(x)$.

Vi gør brug af integrationsprøven og differentierer derfor $\int f(x) dx + \int g(x) dx$. Undervejs benyttes definition 2 samt reglen om ledvis differentiation:

$$\left(\int f(x) dx + \int g(x) dx \right)' = \left(\int f(x) dx \right)' + \left(\int g(x) dx \right)' = f(x) + g(x).$$

$\int f(x) dx + \int g(x) dx$ er således stamfunktion til $f(x) + g(x)$.

Regel 2 og 3 vises på samme måde.

EKSEMPEL 5

Vi vil bestemme det ubestemte integral

$$\int (x^4 + 8x^3 - 2x + 5) dx.$$

Integralet findes ved brug af regnereglerne for ubestemte integraler samt udvalgte stamfunktioner fra tabel 1:

$$\begin{aligned} \int (x^4 + 8x^3 - 2x + 5) dx &= \int x^4 dx + 8 \int x^3 dx - 2 \int x dx + \int 5 dx \\ &= \frac{1}{5}x^5 + 8 \cdot \frac{1}{4}x^4 - 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 5x + k \\ &= \frac{1}{5}x^5 + 2x^4 - x^2 + 5x + k. \end{aligned}$$

EKSEMPEL 6

Om funktionen $F(x)$ oplyses det, at dens graf går gennem punktet $(1, 7)$ og er stamfunktion til funktionen $f(x) = 4x^3 + 6x - 5$. Vi ønsker at bestemme forskriften for $F(x)$.

Først bestemmes samtlige stamfunktioner til $f(x)$:

$$\int f(x) dx = \int (4x^3 + 6x - 5) dx = x^4 + 3x^2 - 5x + k.$$

Da grafen for $F(x)$ går gennem punktet $(1, 7)$, er $F(1) = 7$. Vi har derfor, at

$$F(1) = 7 \Leftrightarrow 1^4 + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + k = 7 \Leftrightarrow -1 + k = 7 \Leftrightarrow k = 8.$$

Forskriften for $F(x)$ er således $F(x) = x^4 + 3x^2 - 5x + 8$.

1.3 INTEGRATION VED SUBSTITUTION

Vi har tidligere udledt regneregler for differentialkvotienter, herunder reglen for, hvordan man differentierer sammensatte funktioner. Vi skal nu se en metode til at bestemme integraler, hvor der indgår sammensatte funktioner. Metoden kaldes for *integration ved substitution*. Metoden er ganske håndfast, og ved første øjekast kan det være vanskeligt at se, hvorfor metoden er gyldig. Med sætning 5 sikrer vi os imidlertid dette. Vi illustrerer først metoden i et eksempel:

KAPITELOVERSIGT 1

STAMFUNKTION

Funktionen $F(x)$ er stamfunktion til $f(x)$, hvis $F'(x) = f(x)$.

UBESTEMT INTEGRAL

Hvis $F(x)$ er stamfunktion til $f(x)$, skriver vi, at $F(x) = \int f(x) dx$.

$\int f(x) dx$ kaldes for *det ubestemte integral* af $f(x)$, og $f(x)$ kaldes for *integranden*.

REGNEREGLER FOR UBESTEMTE INTEGRALER

Hvis $f(x)$ og $g(x)$ er kontinuerte funktioner med samme definitionsområde, og k er en konstant, gælder følgende:

- 1) $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$
- 2) $\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx.$
- 3) $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx.$

INTEGRATION VED SUBSTITUTION

Hvis $g(x)$ er differentiabel med den kontinuert afledede $g'(x)$, og $f(x)$ også er kontinuert, gælder følgende:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt = F(t) + k = F(g(x)) + k,$$

hvor $t = g(x)$ og $F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$.

2. AREAL OG BESTEMT INTEGRAL

I den grundlæggende geometri bestemmer man arealer af figurer såsom trekanter, firkanter og cirkler samt rumfang af f.eks. kugler, kasser, cylindre mm. Vi skal i dette kapitel udvide teorien om arealer og rumfang, og vi udvikler metoder til bestemmelse af avancerede geometriske og rumlige figurer. Det viser sig, at stamfunktioner spiller en afgørende rolle i denne form for areal- og rumfangsbestemmelse. Mere specifikt skal vi undersøge, hvordan man kan bestemme arealet af et område, der er afgrænset af x -aksen og grafen for en kontinuert funktion. Vi skal endvidere se, hvordan man bestemmer arealet af områder mellem grafer, længden af en kurve og rumfanget af omdrejningslegemer.

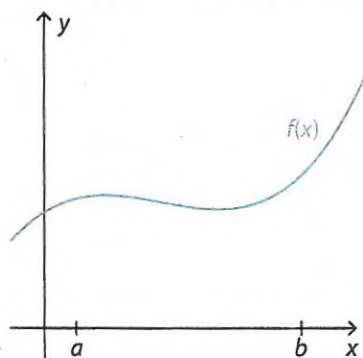
Arealbestemmelse er bl.a. vigtigt i forbindelse med statistik og sandsynlighedsregning, fordi sandsynligheder kan opfattes som arealer af områder under frekvensfunktionen (tæthedsfunktionen). Areal- og rumfangsbestemmelse kan desuden anvendes til beregninger af tværsnit og rumfang af en lang række konstruktioner, f.eks. bygninger, beholdere, flyvinger mm. Teorien kan derudover benyttes til at beregne længden af kurver såsom hængebroers kabler.

DETTE KAPITEL

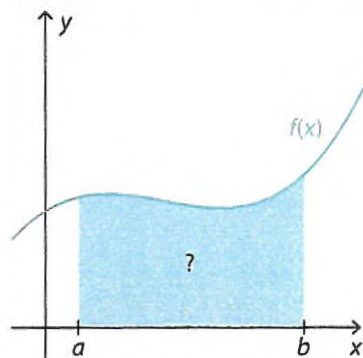
I dette kapitel indføres begrebet *arealfunktion*, og det vises, at arealfunktionen er en stamfunktion. Derudover indføres *det bestemte integral*, og vi ser, hvordan bestemte integraler kan anvendes til arealbestemmelse. Til sidst i kapitlet vises, hvordan integraler kan bruges til at bestemme både kurvelængde og rumfang.

2.1 AREALFUNKTION

Vi betragter en kontinuert, ikke-negativ funktion $f(x)$ i intervallet $[a; b]$. På figur 1 ses et eksempel på grafen for en sådan funktion:



Figur 1



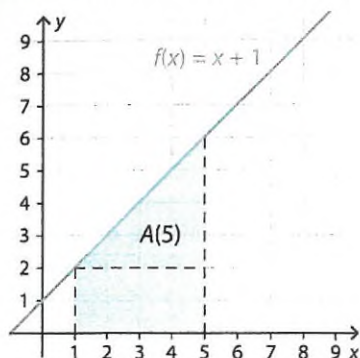
Figur 2

På figur 2 er området mellem grafen for $f(x)$ og x -aksen i intervallet $[a; b]$ markeret. Vi skal i det følgende udlede en metode til at bestemme arealet af et område som dette, når forskriften for $f(x)$ er kendt. Metoden involverer den såkaldte *arealfunktion*, der illustreres ved et eksempel.

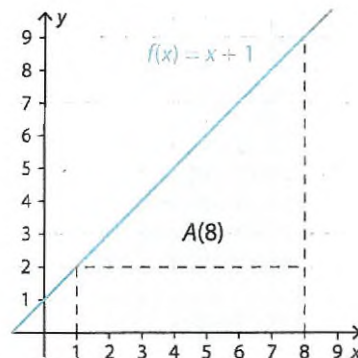
EKSEMPEL 1

Vi betragter den lineære funktion $f(x) = x + 1$ i intervallet $[1; \infty[$. I dette interval er $f(x)$ ikke-negativ og kontinuert.

Vi vil bestemme arealet mellem grafen for $f(x)$ og x -aksen i intervallet $[1; 5]$. Arealet af dette område betegnes $A(5)$ (se figur 3).



Figur 3



Figur 4

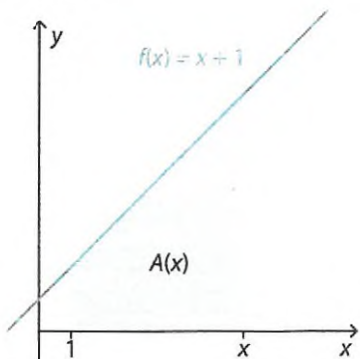
Arealet af det blå område på figur 3 består af et rektangel med sidelængderne 2 og 4 og en retvinklet trekant med kateter af længde 4. Arealet kan derfor bestemmes på følgende måde:

$$A(5) = 2 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8 + 8 = 16.$$

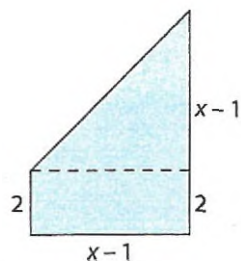
Tilsvarende kan vi bestemme arealet under grafen for $f(x)$ i intervallet $[1; 8]$ (se figur 4):

$$A(8) = 2 \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 = 14 + 24,5 = 38,5.$$

Vi kan udlede en regneforskrift til at beregne arealet mellem grafen for $f(x)$ og x -aksen i intervallet $[1; x]$. Den figur, vi skal beregne arealet af, er illustreret på figur 5 og 6.



Figur 5



Figur 6

Arealet $A(x)$ kan bestemmes som arealet af et rektangel lagt sammen med arealet af en retvinklet trekant:

$$A(x) = 2 \cdot (x-1) + \frac{1}{2} \cdot (x-1)(x-1) = 2x - 2 + \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 1 - 2x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}.$$

Arealet i ethvert interval $[1; x]$ mellem grafen for $f(x)$ og x -aksen kan altså beregnes ved at benytte den generelle forskrift

$$A(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}.$$

Vi kan opfatte $A(x)$ som en funktion, der til enhver x -værdi angiver arealet mellem $f(x)$ og x -aksen i intervallet $[1; x]$.

Funktionen $A(x)$ kaldes for en *arealfunktion*. I dette specifikke tilfælde er $A(x)$ arealfunktionen hørende til $f(x) = x + 1$ i intervallet $[1; x]$

Hvis $A(x)$ differentieres fås

$$A'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x + 1 = x + 1 = f(x).$$

Vi ser hér, at arealfunktionen $A(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$. Det viser sig, at dette altid gælder: Hvis $A(x)$ er arealfunktion for en ikke-negativ, kontinuert funktion $f(x)$, er $A(x)$ stamfunktion til $f(x)$.

I følgende definition præciseres, hvad der forstås ved en arealfunktion:

DEFINITION 1 (AREALFUNKTION)

Lad $f(x)$ være ikke-negativ og kontinuert i intervallet $[a; b]$. Ved arealfunktionen $A(x)$ forstås den funktion, der til enhver x -værdi i $[a; b]$ angiver arealet mellem grafen for $f(x)$ og x -aksen i intervallet $[a; x]$.

2.2 AREALFUNKTION OG STAMFUNKTION

I eksempel 1 var det forholdsvis enkelt at bestemme forskriften for arealfunktionen, fordi $f(x) = x + 1$ er en lineær funktion. Vi skal nu udlede en metode til at bestemme forskriften for arealfunktionen for enhver ikke-negativ, kontinuert funktion. Der gælder følgende sætning:

SÆTNING 1

Lad $f(x)$ være ikke-negativ og kontinuert i intervallet $[a; b]$, og lad $A(x)$ være arealfunktionen, der angiver arealet mellem $f(x)$ og x -aksen i intervallet $[a; x]$, hvor $a \leq x \leq b$. Da gælder følgende:

$$A(x) \text{ er stamfunktion til } f(x).$$

BEVIS

Vi skal vise, at $A(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$. Det vil med andre ord sige, at vi skal vise, at $A'(x) = f(x)$.

Vi minder om, at differentialkvotienten $A'(x_0)$ bestemmes ved at undersøge differenskvotientens grænseværdi for $h \rightarrow 0$. Differenskvotienten for $A(x)$ er givet ved

$$\frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h}.$$

Målet er således at undersøge, hvad der sker med denne brøk, når $h \rightarrow 0$.

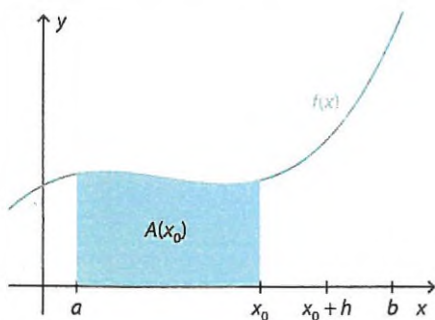
Vi ser på et vilkårligt punkt x_0 i $]a; b[$ samt punktet $x_0 + h$.

Af hensyn til de figurer, der gøres brug af i beviset, gør vi følgende antagelser om $f(x)$:

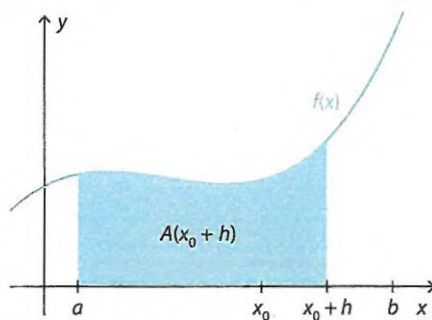
- Tilvæksten h regnes positiv, således at punktet $x_0 + h$ ligger til højre for x_0 .
- $f(x)$ er voksende i et interval til højre for x_0 .

Disse betingelser er ikke nødvendige for sætningens gyldighed, men gør beviset nemmere at gennemføre.

På figur 7 og 8 angiver $A(x_0)$ og $A(x_0 + h)$ de markerede områders arealer.

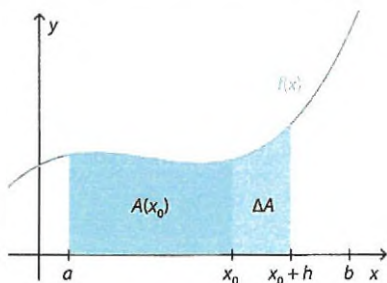


Figur 7

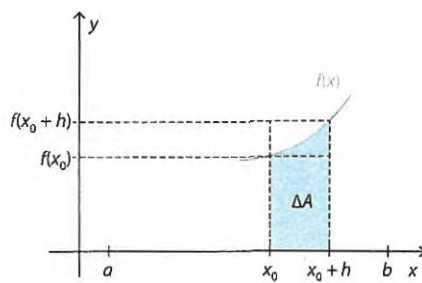


Figur 8

Forskellen mellem $A(x_0)$ og $A(x_0 + h)$ betegner vi med ΔA (se figur 9).



Figur 9

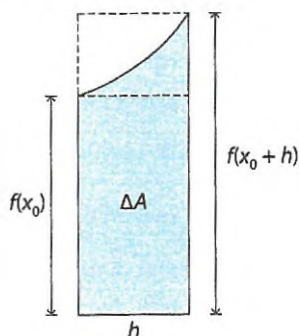


Figur 10

Det gælder dermed, at

$$\Delta A = A(x_0 + h) - A(x_0).$$

På figur 10 er indtegnet to rektangler omkring grafen for $f(x)$ i området $[x_0; x_0 + h]$. Vi zoomer nu ind på dette område af grafen:



Figur 11

Af figur 11 fremgår det, at figuren med arealet ΔA er sluttet inde mellem disse to rektangler: Det ene rektangel har sidelængderne h og $f(x_0)$, og det andet rektangel har sidelængderne h og $f(x_0 + h)$. De to rektangler har arealerne $h \cdot f(x_0)$ og $h \cdot f(x_0 + h)$. Idet $f(x)$ er voksende i intervallet $[x_0; x_0 + h]$, gælder det, at

$$h \cdot f(x_0) \leq \Delta A \leq h \cdot f(x_0 + h).$$

Da $h > 0$ kan vi dividere med h uden at ændre ulighedstegnene:

$$f(x_0) \leq \frac{\Delta A}{h} \leq f(x_0 + h).$$

Idet $\Delta A = A(x_0 + h) - A(x_0)$, kan uligheden skrives sådan:

$$f(x_0) \leq \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h).$$

Det midterste udtryk i denne ulighed er netop differenskvotienten for $A(x)$. For at vurdere, hvad denne differenskvotient går mod, når $h \rightarrow 0$, bruger vi et såkaldt "klemmeargument", idet vi undersøger grænseværdien for venstre og højre side af uligheden:

- Fordi $f(x_0)$ ikke afhænger af h , gælder det, at $f(x_0) \rightarrow f(x_0)$ for $h \rightarrow 0$.
- Fordi $f(x)$ er kontinuert, gælder det, at $f(x_0 + h) \rightarrow f(x_0)$ for $h \rightarrow 0$.

Differenskvotienten $\frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h}$ er således "klemmt inde" mellem to størrelser, der begge går mod $f(x_0)$ for $h \rightarrow 0$. Vi kan dermed konkludere, at

$$\frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \rightarrow f(x_0) \text{ for } h \rightarrow 0.$$

Differenskvotientens grænseværdi er $f(x_0)$ for $h \rightarrow 0$, hvilket er ensbetydende med, at $A'(x_0) = f(x_0)$. Da x_0 var et vilkårligt punkt i intervallet $]a; b[$, gælder det, at $A'(x) = f(x)$. $A(x)$ er således en stamfunktion til $f(x)$.

Man kan med små modifikationer også gennemføre beviset, når $h < 0$, og når $f(x)$ ikke er voksende til højre for x_0 . Det vil vi dog undlade hér.

AREALBESTEMMELSE

I følge sætning 1 er arealfunktionen en stamfunktion. Sætningen siger dog ikke noget om, hvilken af de uendelig mange stamfunktioner, der skal bruges for at bestemme arealet under $f(x)$ i intervallet $[a; b]$. Dette problem løses imidlertid af følgende sætning:

SÆTNING 2

Lad $f(x)$ være kontinuert og ikke-negativ i intervallet $[a; b]$, og lad $F(x)$ være en vilkårlig stamfunktion til $f(x)$. Da kan arealet mellem $f(x)$ og x -aksen i intervallet $[a; b]$ bestemmes ved

$$\text{Areal} = F(b) - F(a).$$

BEVIS

Da arealfunktionen er en stamfunktion, ved vi, at enhver stamfunktion $F(x)$ opfylder, at

$$A(x) = F(x) + k,$$

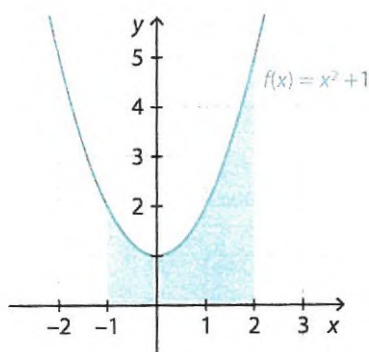
hvor k er en konstant.

Idet $A(x)$ er arealfunktionen, der angiver arealet i intervallet $[a; x]$, gælder det, at $A(a) = 0$, og at $A(b)$ angiver arealet under grafen for $f(x)$ i $[a; b]$. Arealet i intervallet $[a; b]$ er således givet ved

$$A(b) = A(b) - A(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a).$$

EKSEMPEL 2

Vi betragter funktionen $f(x) = x^2 + 1$. Vi vil bestemme arealet under grafen for $f(x)$ i intervallet $[-1; 2]$ (se figur 12).



Figur 12

Vi bestemmer en stamfunktion $F(x)$ og vælger for nemheds skyld integrationskonstanten $k = 0$:

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (x^2 + 1) dx = \frac{1}{3}x^3 + x.$$

Det ønskede areal er

$$F(2) - F(-1) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2 - \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + (-1) \right) = \frac{14}{3} - \left(-\frac{4}{3} \right) = \frac{18}{3} = 6.$$

Funktionen $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + 5$ er ligeledes stamfunktion til $f(x)$. Arealet kan også bestemmes ved brug af denne funktion:

$$G(2) - G(-1) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2 + 5 - \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + (-1) + 5 \right) = \frac{29}{3} - \left(\frac{11}{3} \right) = \frac{18}{3} = 6.$$

Hvilken stamfunktion, vi vælger, har ikke betydning for det endelige resultat. For nemheds skyld vil man dog som regel vælge den stamfunktion, der har integrationskonstanten $k = 0$.

2.3 BESTEMT INTEGRAL

Vi har nu set, hvordan arealer under grafer kan bestemmes ved brug af stamfunktioner. Før vi ser nærmere på arealbestemmelse, indfører vi det *bestemte integral*:

DEFINITION 2 (BESTEMT INTEGRAL)

Lad $f(x)$ være kontinuert i $[a; b]$. Ved *det bestemte integral* af $f(x)$ i intervallet $[a; b]$ forstås

$$F(b) - F(a),$$

hvor $F(x)$ er en vilkårlig stamfunktion til $f(x)$.

Vi skriver, at

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Størrelsen $\int_a^b f(x) dx$ læses 'det bestemte integral af $f(x)$ fra a til b '. Tallene a og b kaldes for nedre og øvre grænse.

Bemærk, at definitionen af det bestemte integral er uafhængig af arealer, og at det ikke forudsættes, at $f(x)$ er positiv i $[a; b]$. Bemærk desuden, at det bestemte integral er et tal, mens det ubestemte integral er en funktion.

Der gælder følgende regneregler for bestemte integraler:

SÆTNING 3 (REGNEREGLER FOR BESTEMT INTEGRAL)

Hvis $f(x)$ og $g(x)$ begge er kontinuerte i intervallet $[a; b]$, og k er en konstant, gælder følgende:

$$1) \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$2) \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

$$3) \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

BEVIS

For at vise den første regneregul, skal vi vise, at de to sider af lighedstegnet er ens.

Vi lader $F(x)$ og $G(x)$ betegne stamfunktioner til $f(x)$ og $g(x)$ og udregner først højre side:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx &= F(b) - F(a) + (G(b) - G(a)) \\ &= F(b) + G(b) - F(a) - G(a). \end{aligned}$$

På venstre side udnytter vi, at en stamfunktion til $f(x) + g(x)$ er $F(x) + G(x)$:

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= (F(b) + G(b)) - (F(a) + G(a)) \\ &= F(b) + G(b) - F(a) - G(a). \end{aligned}$$

De øvrige regler vises helt tilsvarende.

EKSEMPEL 3

Vi vil bestemme det bestemte integral af funktionen $f(x) = 6x^2 + 2x$ i intervallet $[2; 4]$. Vi benytter regneregel 1 om ledvis integration:

$$\begin{aligned}\int_2^4 (6x^2 + 2x) dx &= \int_2^4 6x^2 dx + \int_2^4 2x dx = [2x^3]_2^4 + [x^2]_2^4 \\ &= 2 \cdot 4^3 - 2 \cdot 2^3 + (4^2 - 2^2) = 112 + 12 = 124.\end{aligned}$$

Vi kan bestemme integralet $\int_0^1 5x^2 dx$ ved brug af regneregel 3:

$$\int_0^1 5x^2 dx = 5 \int_0^1 x^2 dx = 5 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = 5 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right) = \frac{5}{3}.$$

Integralet $\int_1^3 (2x - 6) dx$ bestemmes på følgende måde:

$$\int_1^3 (2x - 6) dx = [x^2 - 6x]_1^3 = 3^2 - 6 \cdot 3 - (1^2 - 6 \cdot 1) = -9 + 5 = -4.$$

Bemærk hér, at det bestemte integral ikke nødvendigvis er et positivt tal.

BESTEMT INTEGRAL OG INTEGRATION VED SUBSTITUTION

Når man arbejder med bestemte integraler, hvor der indgår en sammensat funktion i integranden, er det vigtigt, at man er opmærksom på integralets grænser. For bestemte integraler er der to måder at udføre integration ved substitution på.

SÆTNING 4

Lad $g(x)$ være differentiabel med den kontinuerte afledede $g'(x)$, og lad $f(x)$ være kontinuert. Så gælder

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt.$$

For den nedre grænse $a = 0$ er $t(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$, og for den øvre grænse $b = \pi$ er $t(\pi) = \frac{\pi}{2}$.

Vi gennemfører nu beregningerne med t som variabel, hvor vi undervejs erstatter de oprindelige grænser med de nye grænser:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi 4 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cdot \cos t \cdot 2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8 \cos t dt \\ &= \left[8 \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 8 \sin 0 = 8.\end{aligned}$$

2.4 AREALBESTEMMELSE

Bestemte integraler kan i en lang række tilfælde benyttes til at bestemme arealer under og mellem kurver. Der gælder følgende sætning, som udtrykker indholdet af sætning 2 formuleret ved brug af det bestemte integral:

SÆTNING 5

Hvis $f(x)$ er ikke-negativ og kontinuert i intervallet $[a; b]$, kan arealet mellem grafen for $f(x)$ og x -aksen i intervallet $[a; b]$ bestemmes ved

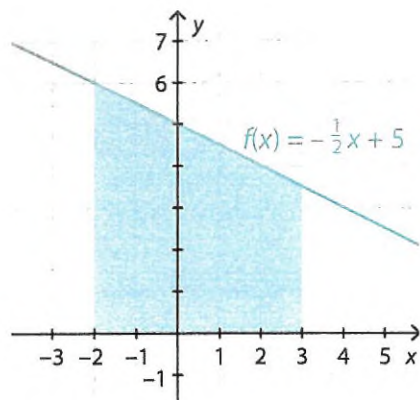
$$\int_a^b f(x) dx.$$

EKSEMPEL 5

Funktionen $f(x) = -\frac{1}{2}x + 5$ er kontinuert og ikke-negativ i intervallet $[-2; 3]$. Arealet af området, der afgrænses af grafen for $f(x)$, x -aksen og linjerne $x = -2$ og $x = 3$, kan derfor bestemmes ved

$$\begin{aligned}\text{Areal} &= \int_{-2}^3 \left(-\frac{1}{2}x + 5\right) dx = \left[-\frac{1}{4}x^2 + 5x\right]_{-2}^3 \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - \left(-\frac{1}{4} \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2)\right) \\ &= -\frac{9}{4} + 15 - (-1 - 10) = \frac{95}{4} = 23,75.\end{aligned}$$

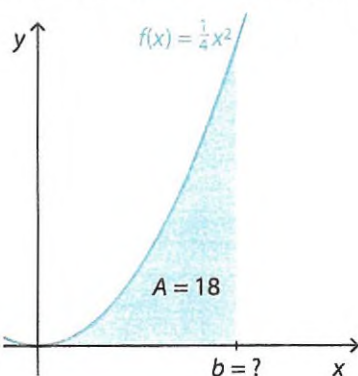
Det område, vi har bestemt arealet af, ses på figur 13.



Figur 13

EKSEMPEL 6

Vi betragter funktionen $f(x) = \frac{1}{4}x^2$. Det oplyses, at arealet mellem grafen for $f(x)$ og x -aksen i intervallet $[0; b]$ er 18. Vi vil bestemme b (se figur 14).



Figur 14

Først bestemmes en stamfunktion til $f(x)$:

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{1}{4}x^2 dx = \frac{1}{12}x^3 + k.$$

For at bestemme b skal vi i følge sætning 5 løse ligningen

$$\int_0^b f(x) dx = 18$$

mht. b . Det gøres på følgende måde:

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{1}{4}x^2 dx = 18 &\Leftrightarrow \left[\frac{1}{12}x^3 \right]_0^b = 18 \Leftrightarrow \frac{1}{12} \cdot b^3 - \frac{1}{12} \cdot 0^3 = 18 \\ &\Leftrightarrow b^3 = 216 \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{216} = 6. \end{aligned}$$

Med følgende sætning formuleres en metode til at bestemme arealet mellem to grafer:

SÆTNING 6

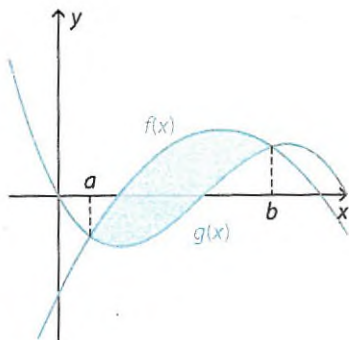
Hvis funktionerne $f(x)$ og $g(x)$ er kontinuerte i $[a; b]$, og $g(x) \leq f(x)$ for alle x i intervallet $[a; b]$, er arealet af området mellem de to grafer i $[a; b]$ bestemt ved

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

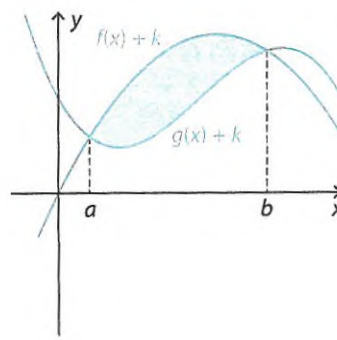
BEVIS

På figur 15 er graferne for $f(x)$ og $g(x)$ afbildet i et koordinatsystem. Af figuren fremgår det, at $g(x) \leq f(x)$ i hele intervallet $[a; b]$.

For et passende valg af k kan vi parallelforskyde graferne lodret, således at de begge er ikke-negative i intervallet $[a; b]$ (se figur 16).



Figur 15



Figur 16

Arealet af området mellem grafen for $f(x) + k$ og x -aksen i intervallet $[a; b]$ er

$$\int_a^b (f(x) + k) dx,$$

og arealet af området mellem grafen for $g(x) + k$ og x -aksen i intervallet $[a; b]$ er

$$\int_a^b (g(x) + k) dx.$$

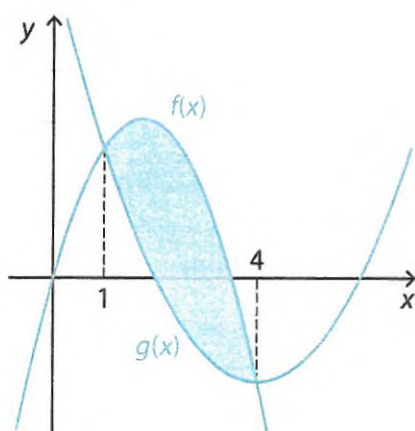
Området mellem de to grafer i intervallet $[a; b]$ kan bestemmes ved at trække det mindste areal fra det største:

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + k) dx - \int_a^b (g(x) + k) dx &= \int_a^b (f(x) + k) - (g(x) + k) dx \\ &= \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \end{aligned}$$

Læg mærke til, at sætning 6 ikke har som forudsætning, at $f(x)$ og/eller $g(x)$ er ikke-negative. Sætningen gælder således uanset hvor i koordinatsystemet, funktionernes grafer befinder sig, så længe $g(x) \leq f(x)$ i det givne interval. Vi behøver derfor ikke at parallelforskyde graferne, men skal blot beregne det bestemte integral af forskellen på den 'øverste' og den 'nederste' graf i intervallet.

EKSEMPEL 7

Graferne for funktionerne $f(x) = -x^2 + \frac{7}{2}x$ og $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$ afgrænser et område, der har et areal. På figur 17 er området markeret.



Figur 17

Vi bestemmer x-koordinaterne til de to grafers skæringspunkter ved at løse ligningen $f(x) = g(x)$ i CAS:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + \frac{7}{2}x = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4.$$

Da $g(x) \leq f(x)$ i intervallet $[1; 4]$, bestemmes arealet af området i CAS på følgende måde:

$$\int_1^4 (f(x) - g(x)) dx = \frac{27}{4} = 6,75.$$

Vi kan ved brug af sætning 6 udlede, hvordan det bestemte integral skal fortolkes i et interval, hvor $f(x) \leq 0$. Der gælder følgende sætning:

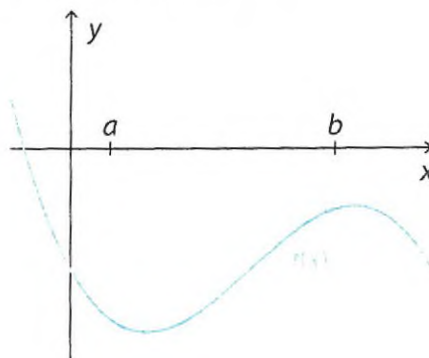
SÆTNING 7

Hvis funktionen $f(x)$ er kontinuert i $[a; b]$, og $f(x) \leq 0$ i $[a; b]$, er arealet af området mellem grafen for $f(x)$ og x-aksen i intervallet givet ved

$$-\int_a^b f(x) dx.$$

BEVIS

På figur 18 ses grafen for en funktion $f(x)$, hvor $f(x) \leq 0$ i intervallet $[a; b]$. Vi ønsker at bestemme arealet af det markerede område.



Figur 18

Funktionen $y = 0$ er sammenfaldende med x-aksen. Fordi $f(x) \leq 0$ i $[a; b]$, kan vi ifølge sætning 6 bestemme arealet af området mellem $y = 0$ og $f(x)$ i $[a; b]$ ved

$$\text{Areal} = \int_a^b (0 - f(x)) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

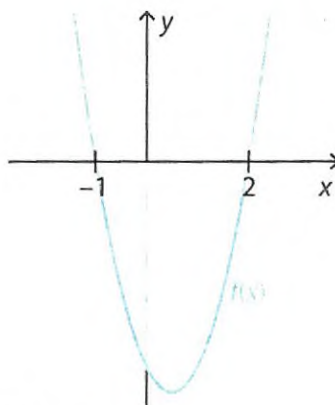
EKSEMPEL 8

Om funktionen $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$ gælder det, at $f(x) \leq 0$ i intervallet $[-1; 2]$. Med CA bestemmer vi integralet af $f(x)$ fra -1 til 2 :

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx = -9.$$

På figur 19 er området mellem grafen for $f(x)$ og x-aksen i intervallet $[-1; 2]$ markeret. Ifølge sætning 7 har området følgende areal:

$$\text{Areal} = - \int_{-1}^2 f(x) dx = -(-9) = 9.$$



Figur 19

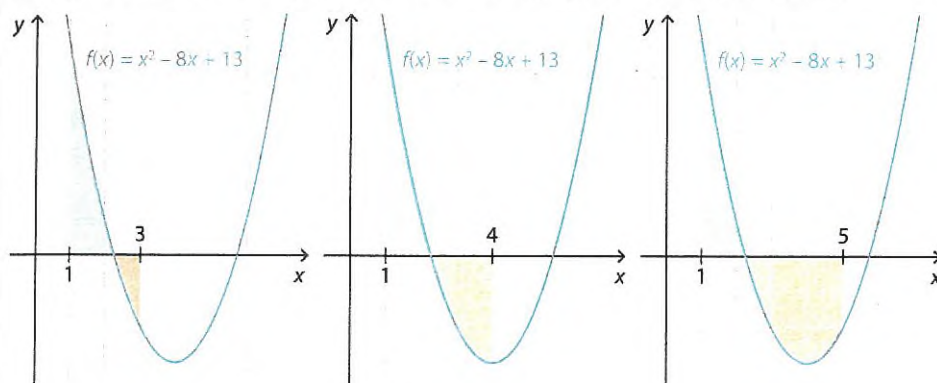
EKSEMPEL 9

Funktionen $f(x)$ er givet ved $f(x) = x^2 - 8x + 13$. Ved hjælp af CAS bestemmes følgende tre integraler:

$$\int_1^3 f(x) dx = \frac{8}{3}, \quad \int_1^4 f(x) dx = 0, \quad \int_1^5 f(x) dx = -\frac{8}{3}.$$

Af resultaterne fremgår det, at bestemte integraler ikke altid har en positiv værdi.

Den geometriske fortolkning af de tre integraler fremgår af figur 20, 21 og 22:



Figur 20

Figur 21

Figur 22

På figur 20 er det blå område større end det gule. Derfor har det bestemte integral fra 1 til 3 en positiv værdi $\left(\frac{8}{3}\right)$.

På figur 21 har det blå område præcis samme areal som det gule område. Derfor har det bestemte integral fra 1 til 4 værdien 0.

På figur 22 er området under x-aksen større end området over x-aksen. Derfor er det bestemte integral fra 1 til 5 negativt $\left(-\frac{8}{3}\right)$.

Hvis vi integrerer en funktion $f(x)$ over et interval, hvor $f(x)$ har negative funktionsværdier, kan vi således ikke tolke integralets værdi som et areal. De områder, hvor $f(x)$ har negative y -værdier, giver et negativt bidrag til integralet. Integralets værdi er i et sådant tilfælde arealet af området over x -aksen fratrasket arealet af området under x -aksen. Hvert af integralerne ovenfor angiver således forskellen på arealet af det blå område (over x -aksen) og arealet af det gule område (under x -aksen).

Ønsker man at beregne det samlede areal af de farvede områder på figur 20, er man nødt til at dele op i intervaller. Grafen for $f(x)$ skærer x -aksen i $x = 4 - \sqrt{3} \approx 2,268$. Områdernes samlede areal kan beregnes på følgende måde:

$$\text{Areal} = \int_1^{2,268} f(x) dx - \int_{2,268}^3 f(x) dx = 3,46 - (-0,8) = 4,26.$$

Almindeligvis vil man altid integrere over et interval, hvor det mindste tal i intervallet (venstre endepunkt) er nedre grænse i integralet, og det største tal (højre endepunkt) er den øvre grænse. Det er dog muligt at bytte om på grænserne med følgende definition:

DEFINITION 3

Lad $f(x)$ være kontinuert i intervallet $[a; b]$. Da er integralet $\int_b^a f(x) dx$ givet ved

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Bemærk, at denne definition sikrer, at $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ uanset den indbyrdes beliggenhed af a og b .

EKSEMPEL 10

Funktionen $f(x)$ har forskriften

$$f(x) = 3x + 5.$$

$f(x)$ er oplagt positiv i intervallet $[0; 2]$.

Arealet T af området mellem $f(x)$ og x -aksen i $[0; 2]$ kan bestemmes ved

$$T = \int_0^2 (3x + 5) dx = \left[\frac{3}{2}x^2 + 5x \right]_0^2 = \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - \left(\frac{3}{2} \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 \right) = 16.$$

Ombyttes grænserne 0 og 2, fås

$$\int_2^0 (3x + 5) dx = \left[\frac{3}{2}x^2 + 5x \right]_2^0 = \frac{3}{2} \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 - \left(\frac{3}{2} \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 \right) = -16.$$

INDSKUDSREGLER

Når vi integrerer kontinuerte funktioner over intervaller, kan vi dele intervallet op i mindre intervaller og integrere i disse delintervaller. Der gælder følgende regel:

SÆTNING 8 (INDSKUDSREGLER)

Hvis $f(x)$ er kontinuert i intervallet I , og tallene a , b og c tilhører I , gælder følgende:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

BEVIS

Sætningen vises ved, at vi skriver højresiden i ligningen ud:

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx &= [F(x)]_a^c + [F(x)]_c^b \\ &= F(c) - F(a) + F(b) - F(c) \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.\end{aligned}$$

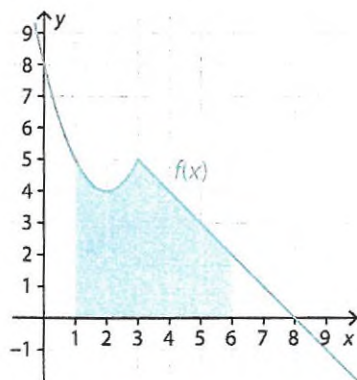
Sætningen gælder uanset den indbyrdes beliggenhed af a , b og c .

EKSEMPEL 11

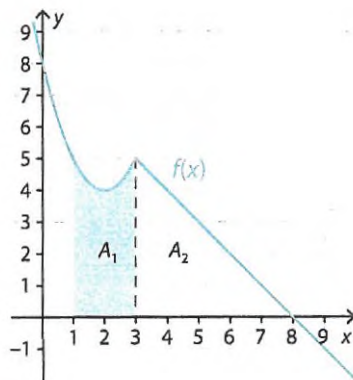
Vi betragter funktionen med forskriften

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 8 & \text{for } x \leq 3 \\ -x + 8 & \text{for } x > 3. \end{cases}$$

På figur 23 ses grafen for $f(x)$, og vi ønsker at bestemme arealet af det blå område, dvs. arealet mellem x -aksen og grafen for $f(x)$ i intervallet $[1; 6]$.



Figur 23



Figur 24

Arealet af området kan bestemmes ved integralet

$$\int_1^6 f(x) dx.$$

$f(x)$ har imidlertid forskellige forskrifter i to områder, og vi benytter derfor indskudsreglen til at dele op i mindre intervaller:

$$\int_1^6 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx = \int_1^3 (x^2 - 4x + 8) dx + \int_3^6 (-x + 8) dx.$$

Det ønskede areal er nu summen af to integraler, som angiver arealerne A_1 og A_2 (se figur 24). Ved håndkraft eller i CAS får vi, at

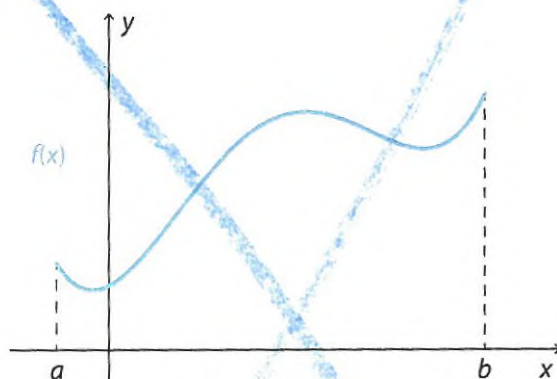
$$A_1 = \int_1^3 (x^2 - 4x + 8) dx = \frac{26}{3} \quad \text{og} \quad A_2 = \int_3^6 (-x + 8) dx = \frac{21}{2}.$$

Arealet under grafen for $f(x)$ i $[1; 6]$ er dermed

$$A_1 + A_2 = \frac{26}{3} + \frac{21}{2} = \frac{115}{6} \approx 19,17.$$

2.5 KURVELÆNGDE

Vi skal se på, hvordan man bestemmer længden af grafen for en funktion $f(x)$, der er differentiabel i et interval $[a; b]$. På figur 25 ses et eksempel på grafen for en funktion $f(x)$ og det stykke, vi vil beregne længden af.



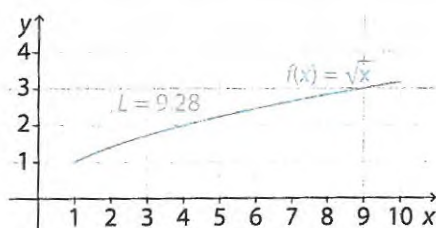
Figur 25

Længden af grafen i intervallet $[a; b]$ kan bestemmes på følgende måde:

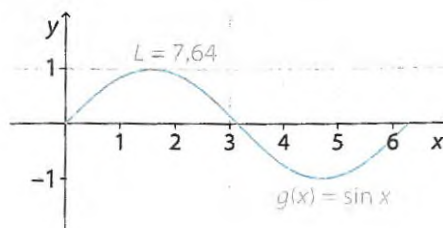
SÆTNING 9 (KURVELÆNGDE)

Hvis $f(x)$ er differentiabel i $[a; b]$, er kurvelængden L af grafen for $f(x)$ i intervallet $[a; b]$ givet ved

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$



Figur 28

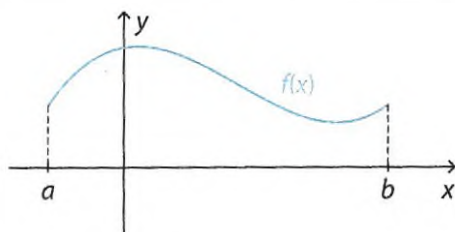


Figur 29

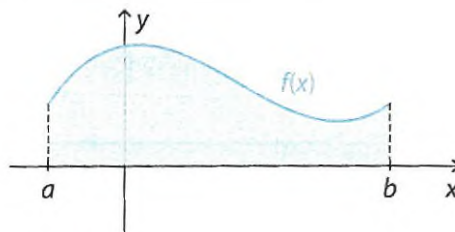
2.6 RUMFANG

Vi skal nu se, hvordan det bestemte integral kan benyttes til at bestemme rumfang af såkaldte *omdrejningslegemer*.

På figur 30 ses grafen for en ikke-negativ, kontinuert funktion $f(x)$ i intervallet $[a; b]$. Indtil nu har vi beregnet arealet mellem grafen for $f(x)$ og x -aksen i intervallet $[a; b]$ (se figur 31).

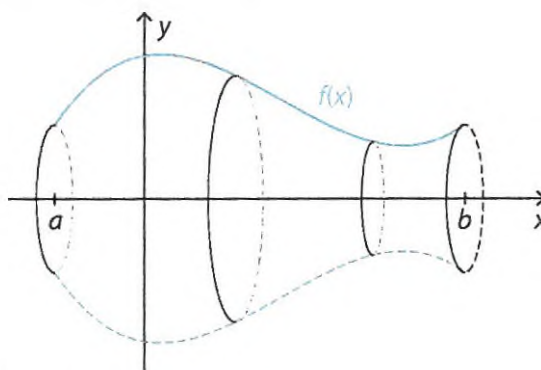


Figur 30



Figur 31

Vi forestiller os nu, at grafen for $f(x)$ drejes 360° om x -aksen (se figur 32). På denne måde fremkommer et såkaldt *omdrejningslegeme*, der svarer til, at hele området mellem x -aksen og grafen for $f(x)$ er drejet 360° om x -aksen.



Figur 32

Rumfanget af dette omdrejningslegeme kan bestemmes på følgende måde:

SÆTNING 10 (RUMFANG AF OMDREJNINGSLEGEME)

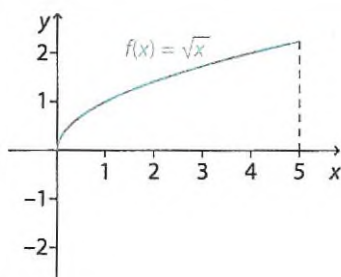
Lad $f(x)$ være kontinuert og ikke-negativ i intervallet $[a; b]$. Det omdrejningslegeme, der fremkommer ved at rotere grafen for $f(x)$ 360° om x -aksen, har rumfanget

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

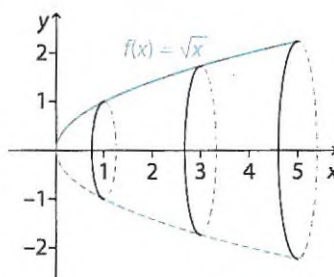
Sætningen bevises i afsnit 2.7 efter sætning 14.

EKSEMPEL 14

På figur 33 ses grafen for funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ i intervallet $[0; 5]$. I dette interval er funktionen ikke-negativ og kontinuert. Omdrejningslegemet, der fremkommer, når grafen for $f(x)$ roteres 360° om x -aksen i intervallet $[0; 5]$ er vist på figur 34.



Figur 33



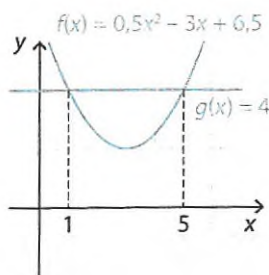
Figur 34

Ifølge sætning 10 kan rumfanget af omdrejningslegemet bestemmes på følgende måde:

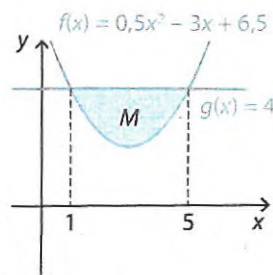
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^5 f(x)^2 dx = \pi \int_0^5 \sqrt{x}^2 dx = \pi \int_0^5 x dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^5 = \pi \left(\frac{1}{2} \cdot 5^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 \right) = \frac{25\pi}{2}. \end{aligned}$$

EKSEMPEL 15

Vi betragter funktionen $f(x) = 0,5x^2 - 3x + 6,5$ og den vandrette linje med forskriften $g(x) = 4$ (se figur 35). Graferne for de to funktioner afgrænser et område M , der har et areal (se figur 36)



Figur 35



Figur 36

De to funktioners grafer skærer hinanden for $x = 1$ og $x = 5$, og da grafen for $g(x)$ er øverst i intervallet $[1; 5]$, kan arealet af M bestemmes ved:

$$\bar{A}_M = \int_1^5 (4 - (0,5x^2 - 3x + 6,5)) dx = \int_1^5 (-0,5x^2 + 3x - 2,5) dx \approx 5,33.$$

Vi kan også beregne rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når punktmængden M roteres 360° om x -aksen.

Først beregner vi i CAS rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når $g(x) = 4$ roteres 360° om x -aksen (se figur 37):

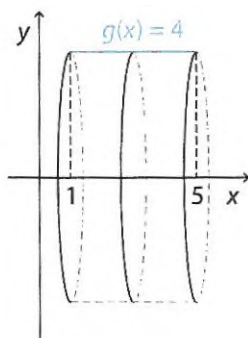
$$V_g = \pi \int_1^5 4^2 dx = \pi [16x]_1^5 = 64\pi \approx 201,06.$$

Der næst beregner vi i CAS rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når grafen for $f(x)$ roteres 360° om x -aksen (se figur 38):

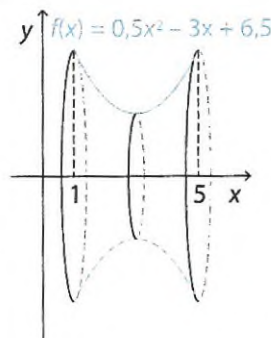
$$V_f = \pi \int_1^5 f(x)^2 dx = \pi \int_1^5 (0,5x^2 - 3x + 6,5)^2 dx = 29,87\pi \approx 93,83.$$

Det ønskede rumfang bestemmes ved at trække det mindste rumfang fra det største (se figur 39):

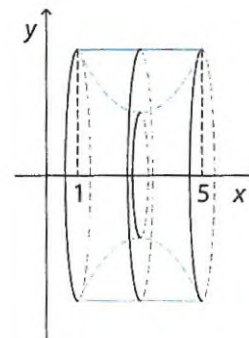
$$V_M = V_g - V_f = 201,06 - 93,83 = 107,23.$$



Figur 37

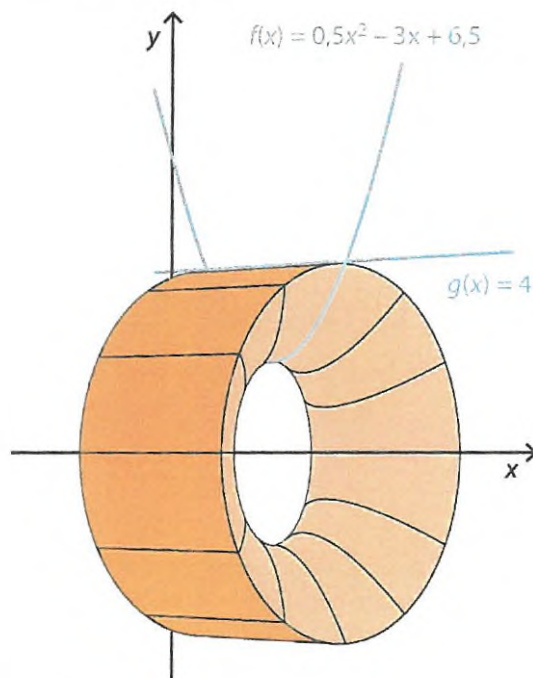


Figur 38



Figur 39

Der er hér tale om et omdrejningslegeme af form som en ring med cylinderformet yderside og en buet inderside (se figur 40).



Figur 40

I forlængelse af eksempel 15 formulerer vi følgende sætning, som kan benyttes til at beregne rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når punktmængden mellem to grafer roteres 360° om førsteaksen. Den figur, vi beregner rumfanget af, kan opfattes som et ringformet omdrejningslegeme.

SÆTNING 11 (OMDREJNINGSLLEGEME MELLEM GRAFER)

Lad $f(x)$ og $g(x)$ være ikke-negative og kontinuerte i $[a; b]$, og lad $f(x) \geq g(x)$ i $[a; b]$. Lad endvidere M betegne punktmængden mellem $f(x)$ og $g(x)$ i intervallet $[a; b]$.

Rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M roteres 360° om førsteaksen, er givet ved

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx - \pi \int_a^b g(x)^2 dx = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) dx.$$