

1.8 OMVENDT FUNKTION

Visse regneoperationer i matematik tænker vi på som hinandens omvendte. F.eks. de to operationer "sætte i anden" og "tage kvadratrods", mens "lægge 5 til" og "trække 5 fra" er et andet eksempel. Det karakteristiske er her, at virkningen af den ene operation bliver ophævet af den anden:

$$1) 7^2 = 49 \text{ og } \sqrt{49} = 7 \quad 2) 7 + 5 = 12 \text{ og } 12 - 5 = 7.$$

I matematik vælger man at se det som funktioner, der er hinandens omvendte:

$$\begin{cases} f(x) = x^2, & x \geq 0 \\ f^{-1}(x) = \sqrt{x} \end{cases} \quad \text{og} \quad \begin{cases} g(x) = x + 5 \\ g^{-1}(x) = x - 5. \end{cases}$$

Vi benytter her notationen f^{-1} og g^{-1} som betegnelser for de omvendte funktioner til f og g . At der er tale om funktioner, der "ophæver hinanden", kan man se, når funktionerne sammensættes:

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x}^2 = x$$

$$g \circ g^{-1}(x) = g(g^{-1}(x)) = g(x - 5) = (x - 5) + 5 = x.$$

Sammensættes funktionerne i den modsatte rækkefølge bliver resultatet det samme:

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x| = x$$

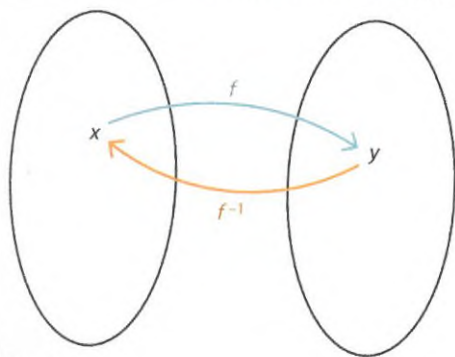
$$g^{-1} \circ g(x) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(x + 5) = (x + 5) - 5 = x.$$

DEFINITION 8

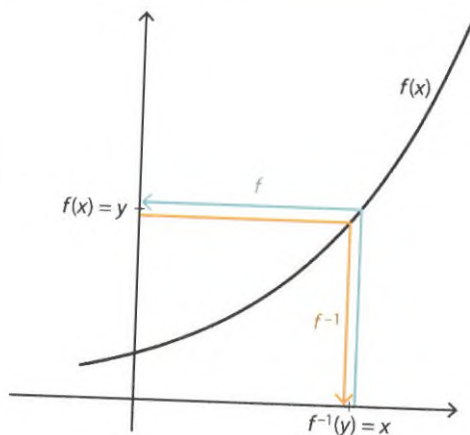
En omvendt funktion til f er en funktion f^{-1} , der virker modsat f .

$$f \circ f^{-1}(x) = x \quad \text{og} \quad f^{-1} \circ f(x) = x.$$

På figur 33 og figur 34 er det omvendte forhold mellem f og f^{-1} illustreret.



Figur 33



Figur 34

EKSEMPEL 15

Funktionerne $f(x) = \sqrt[3]{x}$ og $g(x) = x^3$ er hinandens omvendte: Kubikrodsuddragning og opløftning til 3. potens er nemlig omvendte operationer.

På samme måde er $f(x) = \sqrt[n]{x}$ og $g(x) = x^n$ hinandens omvendte for $x > 0$.

Funktionerne

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 3 \quad \text{og} \quad g(x) = 2x - 6$$

er hinandens omvendte, fordi man ved sammensætning får, at

$$f(g(x)) = f(2x - 6) = \frac{1}{2}(2x - 6) + 3 = x$$

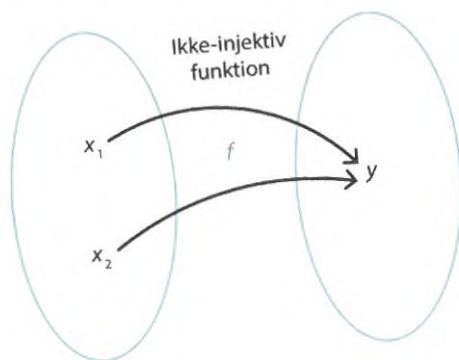
og

$$g(f(x)) = g\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 2\left(\frac{1}{2}x + 3\right) - 6 = x.$$

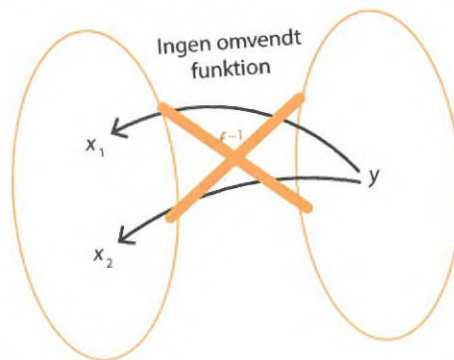
EKSISTENS AF OMVENDT FUNKTION

Når en funktion f har en omvendt funktion, har den kun en. Men det er ikke alle funktioner, der har en omvendt.

Hvis f lader to (eller flere) x -værdier svare til en y -værdi, kan f ikke have en omvendt funktion. Det er illustreret på figur 35 og figur 36. Funktioner af den type kaldes ikke-injektive.



Figur 35

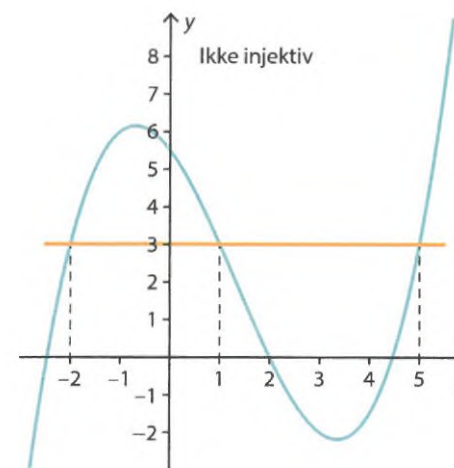


Figur 36

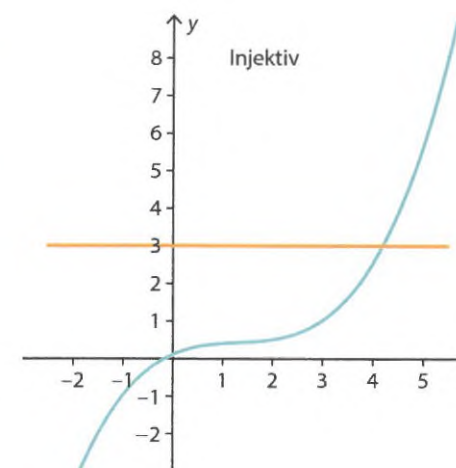
De *injektive* funktioner er dem, der knytter forskellige x -værdier til forskellige y -værdier, og der gælder altså:

Funktionen f har en omvendt funktion, netop når f er injektiv.

Det er nemt ud fra funktionens graf, at se om funktionen er injektiv eller ej. Skærer en vandret linje grafen højst en gang, er funktionen injektiv og har derfor en omvendt funktion. Se figur 37 og figur 38.



Figur 37



Figur 38

Funktioner, der er konstant voksende eller konstant aftagende, er injektive. En vandret linje kan nemlig højst skære en opadgående graf eller en nedadgående graf en gang. Vi har derfor:

SÆTNING 1

En monoton funktion har en omvendt funktion.

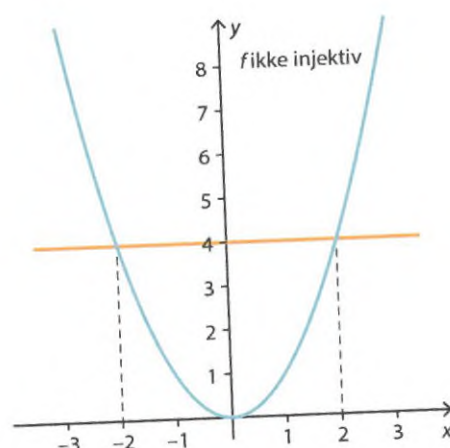
EKSEMPEL 16

Vi ser på de to funktioner

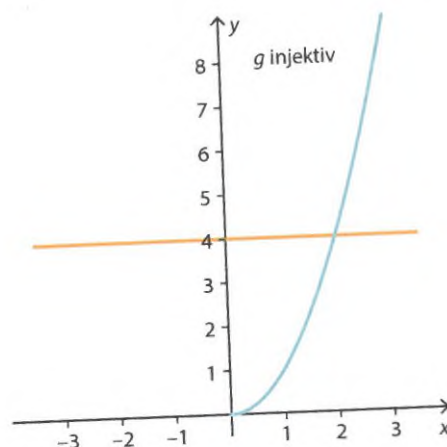
$$f(x) = x^2, \text{ Dm}(f) = \mathbb{R} \quad \text{og} \quad g(x) = x^2, \text{ Dm}(g) = [0, \infty[.$$

Den eneste forskel mellem f og g er, hvor meget der er taget med i definitionsmængden. Som vist på figur 39 og figur 40 kan valg af definitionsmængde have betydning for, om en funktion er injektiv eller ej: f er ikke injektiv, mens g er. Det er altså kun g , der har en omvendt:

$$g^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$



Figur 39



Figur 40

1.9 REGNEFORSKRIFT FOR OMVENDT FUNKTION

Vi skal finde en metode til at bestemme forskriften for f^{-1} , når vi kender forskriften for f . Vi ser på funktionen f med forskriften $f(x) = 2x - 4$.

Forskriften *foreskriver*, hvordan man for et tal x finder et andet tal y – man ganger x med 2 og trækker 4 fra:

$$y = 2x - 4.$$

Forskriften for f^{-1} skal *foreskrive*, hvordan man fra $y = 2x - 4$ kommer tilbage til x . Det ved vi, hvis vi udtrykker x ved y , dvs. isolerer x i ligningen $y = 2x - 4$.

$$y = 2x - 4 \Leftrightarrow 2x = y + 4 \Leftrightarrow x = \frac{y + 4}{2} = \frac{1}{2}y + 2.$$

Man kommer altså tilbage til x ved at gange y med $\frac{1}{2}$ og lægge 2 til. Vi kan også skrive $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y + 2$.

Funktioner er uafhængige af valg af betegnelser for de variable størrelser. Det er den samme funktion, uanset om man skriver y , z , a eller x som navn på den uafhængige variabel. Vi foretrækker x og får derfor som resultat:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 2.$$

Vi opsummerer:

METODE TIL AT BESTEMME f^{-1}

Man finder forskriften for den omvendte funktion f^{-1} til f , når man

1. isolerer x i ligningen $y = f(x)$:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

2. ombytter x og y :

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f^{-1}(x).$$

Selvom den omvendte funktion findes, kan det være svært – i nogle tilfælde endda umuligt – at bestemme forskriften ved hjælp af den nævnte metode.

Problemet er ligningen $y = f(x)$, som for nogle funktioner f kun vanskeligt – eller slet ikke – lader sig løse mht. x . Hvis ligningen ikke kan løses, kan man vælge at definere en helt ny funktion ud fra de egenskaber, den må have som omvendt funktion til f . På den måde defineres logaritmerne $\log x$ og $\ln x$ i kapitel 3.

EKSEMPEL 17

Vi bestemmer den omvendte funktion til hver af de to funktioner f og g :

$$1) f(x) = 4x - 6 \quad \text{og} \quad 2) g(x) = \frac{2x}{x+1}, \quad x \neq -1.$$

Vi isolerer x i ligningen $y = 4x - 6$:

$$y = 4x - 6 \Leftrightarrow 4x = y + 6 \Leftrightarrow x = \frac{y + 6}{4} = \frac{1}{4}y + \frac{3}{2}.$$

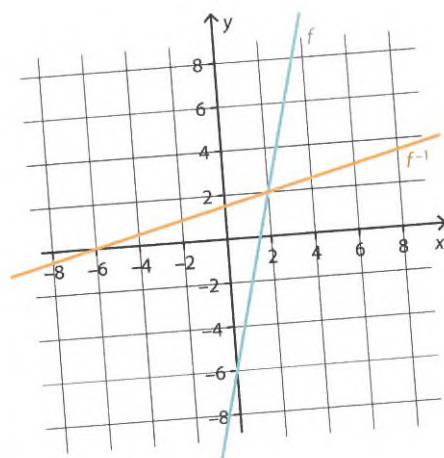
$$\text{Dvs } f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}.$$

Regningerne for den anden funktion er mere besværlige:

$$\begin{aligned} y = \frac{2x}{x+1} &\Leftrightarrow y(x+1) = 2x \Leftrightarrow xy + y = 2x \Leftrightarrow 2x - xy = y \\ &\Leftrightarrow x(2-y) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{2-y}. \end{aligned}$$

$$\text{Altså får vi resultatet } g^{-1}(x) = \frac{x}{2-x}, \quad x \neq 2.$$

På figur 41 og 42 er graferne tegnet.



Figur 41

GRAFEN FOR f OG f^{-1}

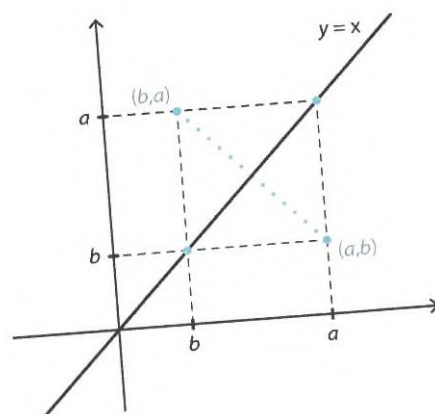
Figur 41 og figur 42 antyder et særligt forhold mellem grafen for en funktion og grafen for den omvendte funktion. Øjensynligt er graferne hinandens spejlbilleder i linjen $y = x$. Det er tilfældet:

SÆTNING 2

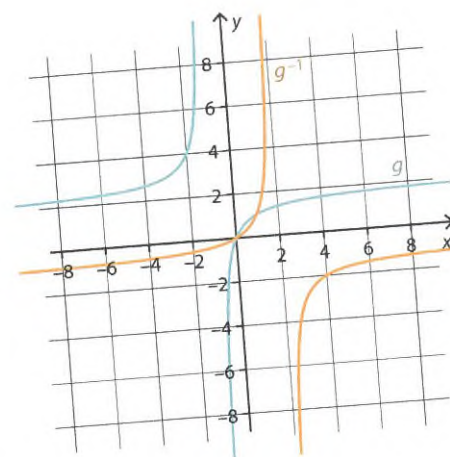
Grafen for f og grafen for f^{-1} er hinandens spejlbilleder i linjen med ligningen $y = x$.

BEVIS

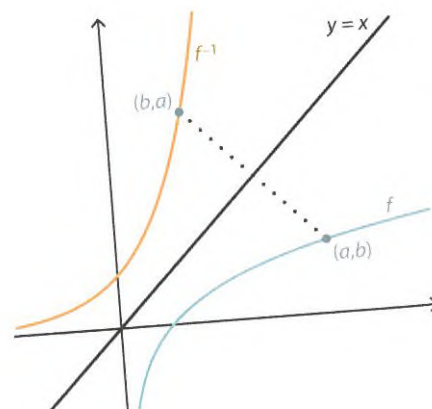
Punkterne (a,b) og (b,a) fremgår af hinanden ved spejling i linjen $y = x$. Det er illustreret på figur 43. Man ser, at punkterne er modstående hjørner i et kvadrat med linjen $y = x$ som diagonal.



Figur 43



Figur 42



Figur 44

Vi ser nu på et punkt (a,b) på grafen for f (figur 44). Vi har ligningen

$$f(a) = b,$$

og da f og f^{-1} er hinandens omvendte, har vi også

$$a = f^{-1}(b).$$

Den sidste ligning viser, at punktet (b,a) ligger på grafen for f^{-1} .

Vi har med andre ord vist, at (a,b) er på grafen for f , netop når (b,a) er på grafen for f^{-1} . Fordi punkter af den type fremkommer af hinanden ved spejling i linjen $y = x$, så må det samme være tilfældet med graferne for f og f^{-1} .

EKSEMPEL 18

En virksomhed sælger en vare til prisen p (kr.), der afhænger af afsætningen a (stk.), dvs. det antal af varen, virksomheden kan sælge. Virksomheden benytter modellen

$$p = -\frac{1}{2}a + 250$$

for sammenhængen mellem p og a .

Vha. modellen ser vi, at med en afsætning på 100 stk. kan prisen sættes til

$$p = -\frac{1}{2} \cdot 100 + 250 = 200 \text{ kr.}$$

Modellen udtrykker p som funktion af a , men vi kan også vælge at udtrykke a ved prisen p :

$$p = -\frac{1}{2}a + 250 \Leftrightarrow \frac{1}{2}a = -p + 250 \Leftrightarrow a = -2p + 500.$$

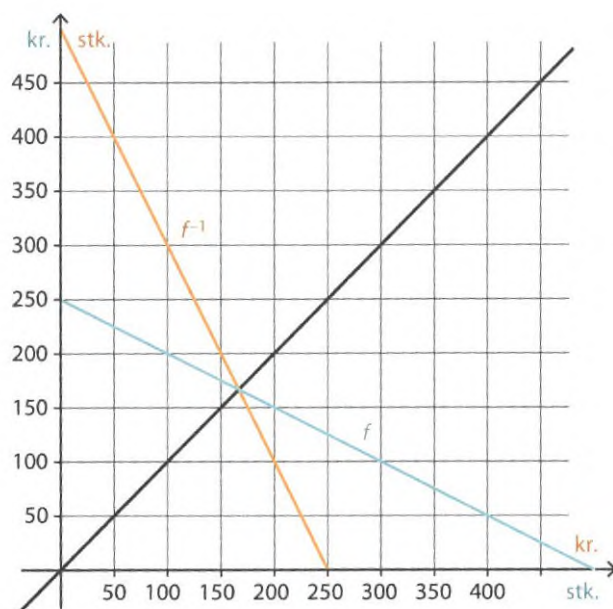
Det er naturligt at benytte dette udtryk, når man på baggrund af prisen ønsker at vurdere afsætningen. Sættes prisen højt, f.eks. til 230 kr., så forudser vi, at afsætningen falder:

$$a = -2 \cdot 230 + 500 = 40 \text{ stk.}$$

Der er tale om funktioner, der er hinandens omvendte:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 250 \quad \text{og} \quad f^{-1}(x) = -2x + 500$$

og tegnes graferne i samme koordinatsystem, ses symmetri om linjen $y = x$:



Figur 45

EKSEMPEL 19

Bremselængden i m for en bil afhænger af hastigheden i km/t, og det viser sig, at den er proportional med kvadratet på hastigheden. Hvis x er hastigheden i km/t og y bremselængden i m, gælder nemlig

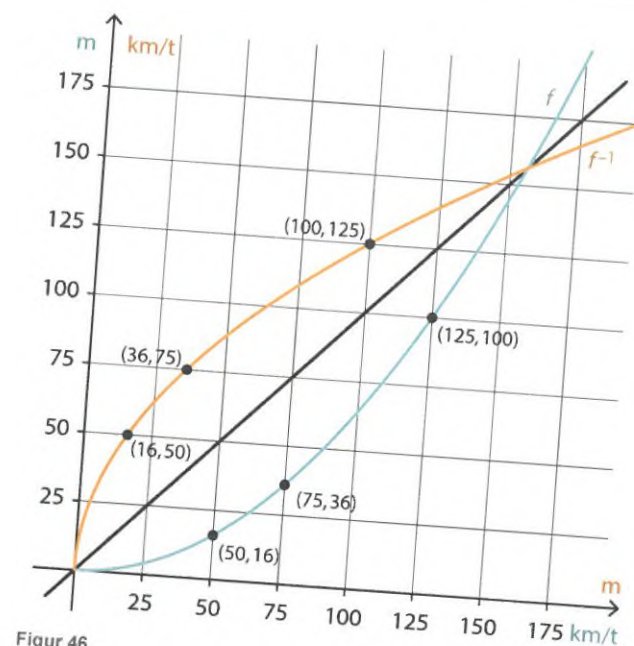
$$f(x) = y = 0,0064x^2.$$

F.eks. giver hastigheder på 50, 75 og 125 km/t bremselængder på 16, 36 og 100 m. Grafen for denne funktion er vist på figur 46. Den går altså gennem punkterne (50,16), (75,36) og (125,100).

Vi har her valgt den uafhængige variabel x som bilens hastighed og den afhængige variabel y som bremselængden. Funktionen er altså svar på spørgsmålet: Hvilken bremselængde i m svarer til en given hastighed?

Nu stiller vi det omvendte spørgsmål: Hvilken hastighed svarer til en given bremselængde? Løsningen på dette problem er politiet interesseret i ved undersøgelser af færdselsulykker.

Det betyder, at vi nu ønsker bremselængden på x -aksen som den uafhængige variabel og hastigheden på y -aksen som den afhængige variabel. Den graf, der svarer til denne situation, er også vist på figur 46. Den går gennem punkterne (16,50), (36,75) og (100,125), fordi en bremselængde på f.eks. 16 m svarer til en hastighed på 50 km/t.



Figur 46

Vi kan bestemme regneforskriften for funktionen f^{-1} ved at isolere x i forskriften for f :

$$y = 0,0064x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{y}{0,0064} \Leftrightarrow x^2 = 156,25y \\ \Leftrightarrow x = 12,5 \cdot \sqrt{y}$$

fordi både x og y er ikke-negative. Den omvendte funktion har derfor forskriften

$$f^{-1}(x) = 12,5\sqrt{x}.$$

Hvis politiet derfor kan måle en bremselængde på f.eks. 36 m, kan man konkludere, at hastigheden var $f^{-1}(36) = 12,5 \cdot \sqrt{36} = 75$ km/t (dog afhængigt af føret).

De to funktioners grafer består af punkter, hvis x - og y -koordinat er byttet om.

1.10 TILFØJELSER OG BEMÆRKNINGER

FUNKTIONER AF FLERE VARIABLE

I visse anvendelser afhænger en størrelse af flere andre størrelser. Man taler så om funktioner af flere variable.

Et eksempel på dette er en formel til at bestemme arealet af en persons hudoverflade målt i m^2 . Overfladearealet er af interesse ved beregning af fordampning fra kroppen. Det viser sig, at en persons overfladeareal A afhænger både af vægten v (i kg) og højden h (i cm). Der gælder sammenhængen

$$A(v, h) = 0,007184 \cdot v^{0,425} \cdot h^{0,725}.$$