

Sætning (Areal mellem to grafer)

Antag at f og g er to kontinuerte funktioner i intervallet $[a; b]$.

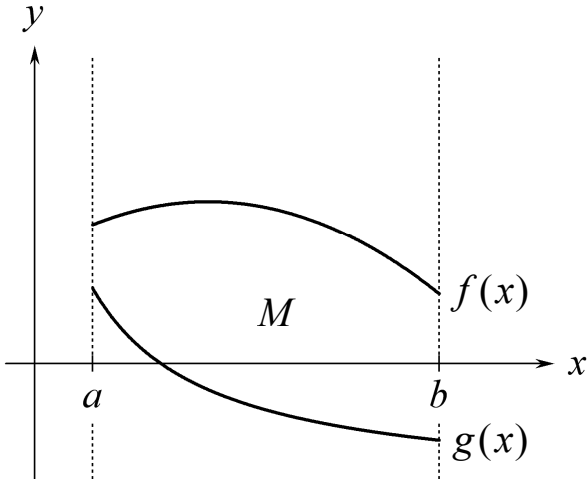
Antag at $f(x) \geq g(x)$ for alle $x \in [a; b]$.

De to grafer afgrænser en punktmængde M , som har et areal, der kan bestemmes med formelen:

$$A(M) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Bevis:

Læs grundigt beviset stille og roligt igennem, hvor du besvarer nedenstående spørgsmål undervejs.

To kontinuerte funktioner $f(x)$ og $g(x)$ tegnes, hvor $f(x) \geq g(x)$ i et lukket og begrænset interval $[a; b]$. Punktmængden M er givet ved $M = \{(x, y) a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\}$ 1. Hvordan kan vi se på figuren af f og g er kontinuerte? 2. Hvad betyder det at $f(x) \geq g(x)$ i et lukket og begrænset interval $[a; b]$. 3. Prøv at læse punktmængden højt for din sidemakker. Hvad betyder det, hvis du ser på figuren?	Illustration: 
Da f og g begge er kontinuerte på $[a; b]$ har de et minimum på dette interval. 4. Hvor er minimum for funktionen $g(x)$ på figuren ovenfor? Derfor kan vi vælge et tal k, som er mindst lige så stor som minimum, så to nye funktioner kan laves: $g_1(x) = g(x) + k$ og $f_1(x) = f(x) + k$, hvor $f_1(x) \geq g_1(x) \geq 0$. 5. Hvad sker der grafisk, hvis man lægger en konstant k til en funktion? 6. Hvad betyder $f_1(x) \geq g_1(x) \geq 0$? 7. Prøv at tegne funktionerne f_1 og g_1 8. Markér den nye punktmængde M_1, der afgrænses af graferne for $f_1(x)$ og $g_1(x)$ og af linjerne $x = a$ og $x = b$.	Illustration:

9. Opskriv M_1 ved mængdebyggeren: 10. Hvor stort er arealet af den nye punktmængde M_1 i forhold til M?	
De to nye funktioner er begge ikke-negative. Derfor kan vi udregne arealet af punktmængden M_1. $A(M_1) = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b g_1(x) dx$ 11. Hvorfor er det rigtigt, at arealet af M_1 er givet ved dette integral (vis på figuren på forrige side?	Indsæt $g_1(x) = g(x) + k$ og $f_1(x) = f(x) + k$ i integralet og brug regneregler for bestemte integraler for at vise, at $A(M) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$. Forklar de enkelte trin i udregningerne herunder hvilke regneregler, der anvendes: $A(M_1) = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b g_1(x) dx$ =