Opgave 1

LB

Integralet bestemmes

$$\int (3x^2+2x+1)dx = 3\cdot\frac{1}{3}x^3+2\cdot\frac{1}{2}x^2+x+k$$
$$= x^3+x^2+x+k$$

Opgave 2

Integralet bestemmes

$$\int (\sin(x)+x)dx = -\cos(x)+\frac{1}{2}x^2+k$$

Opgave 3

f er givet ved $f(x)=\frac{5}{x}+2x,\ x>0$

Vi skal redegøre for, hvilken af de tre funktioner

$$g(x)=\frac{-5}{x^2}+2$$
$$h(x)=5\ln(x)+x^2$$
$$k(x)=\ln(5x)+x$$

der er stamfunktion til f.

Vi differentiere $h(x)$ for at se om $h'(x)=f(x)$

$$h'(x)=5\cdot\frac{1}{x}+2x$$
$$=\frac{5}{x}+2x = f(x)$$

Vi har nu vist at $h(x)$ er stamfunktion til $f(x)$ ved integrationsprøven, da $g(x)\neq h(x)+k$ og $k(x)\neq h(x)+k$, er $h(x)$ den eneste stamfunktion til $f(x)$ af de tre.

Opgave 4

f er givet ved $f(x)=2x+\frac{1}{x},\ x>0$

Vi ønsker at bestemme den stamfunktion til f, hvis graf går igennem $P(1,3)$. $f(x)$ integreres.

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\left(2x+\frac{1}{x}\right)dx = 2\cdot\frac{1}{2}x^2+\ln(x)+k$$
$$= x^2+\ln(x)+k$$

Vi indsætter $P(1,3)$ i $F(x)$

$$F(1) = 1^2 + \ln(1) + k = 3$$

$$1 + 0 + k = 3$$

$$k = 2$$

Vi opskriver $F(x)$

$$F(x) = x^2 + \ln(x) + 2$$

som er den stamfunktion til $f(x)$ hvis graf går igennem $P(1,3)$.

Opgave 5

Integralet bestemmes

$$\int_0^2 (3x^2 \cancel{*} - 10x)\,dx = [x^3 - 5x^2]_0^2$$

$$= 2^3 - 5 \cdot 2^2 - (0^3 - 5 \cdot 0^2)$$

$$= 8 - 20 = -12$$

Opgave 6

To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = x + 5 + \frac{1}{x}$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \cdot (x+1)^2 + \ln(x) + 4x + 3$$

a.) Undersøg, om g er netop den stamfunktion til f, hvis graf går gennem punktet $P(1,9)$

Vi starter med at hæve parentesen i $g(x)$

$$g(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 1 + 2x) + \ln(x) + 4x + 3$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} + x + \ln(x) + 4x + 3$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 5x + \ln(x) + 3{,}5$$

Dernæst laves integrationsprøven

$$g'(x) = x + 5 + \frac{1}{x} = f(x)$$

så $g(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$. $P(1,9)$ indsættes i g for at undersøge om g går igennem dette punkt

$$g(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + \ln(1) + 3{,}5 = \frac{1}{2} + 5 + 0 + 3{,}5 = 9$$

så $g(x)$ er den stamfunktion der går igennem P til f.

Opgave 7.

Vi skal argumentere ud fra graferne i opgaven om det er g eller h der er stamfunktion til f.

Vi ved at en stamfunktion opfylder at $F'(x) = f(x)$, så grafen for f beskriver hældningen af tangenten til grafen for stamfunktionen.

Vi aflæser at $f(x) = 0$ hvor h har lokale ekstremumspunkter, samt at f er positiv hvor h er voksende, samt at f er negativ hvor h er aftagende, derfor er h ~~stam~~ stamfunktion til f. g har ikke ekstremums-punkter hvor f er lig med 0 og er derfor ikke stamfunktion til f.

Opgave 8

Lad funktionen f være givet ved

$$f(x) = 3x^2 - 4x$$

Bestem den stamfunktion til f, hvor grafen for f og grafen for stamfunktionen til f skærer i $x = 3$.

Først bestemmes stamfunktionen til ved at integre f

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (3x^2 - 4x)\,dx$$

$$= x^3 - 2x^2 + k$$

Dernæst benyttes at når de skærer i $x = 3$ må y-værdierne her være lig hinanden, og k isoleres i denne ligning.

$$F(3) = f(3)$$

$$3^3 - 2 \cdot 3^2 + k = 3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3$$

$$\cancel{27} - 18 + k = \cancel{27} - 12$$

$$k = -12 + 18 = 6$$

Stamfunktionen til f hvor $f(3) = F(3)$ er derfor

$$F(x) = x^3 - 2x^2 + 6$$

Opgave 9

Bestem en stamfunktion til funktionen
$f(x) = -3x + 8$, som har linjen
$y = 2x + 5$ som tangent.

Først bestemmes en vilkårlig stamfunktion til f ved at integrere f.

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (-3x+8)\,dx$$

$$= -\frac{3}{2}x^2 + 8x + k$$

Vi ved at $F'(x) = f(x)$ og $f(x)$ ~~bestem~~ beskriver derfor tangentens hældning ~~~~ til f. Denne aflæses til 2 i $y = 2x+5$, vi finder derfor røringspunktet for tangenten ved at løse $f(x) = 2$ for x.

$$f(x) = 2$$

$$-3x + 8 = 2$$

$$-3x = -6$$

$$x = 2$$

Nu har vi fundet 1. koordinaten til røringspunktet. Dernæst findes 2. koordinaten ved tangentens ligning.

$$y = 2 \cdot 2 + 5 = 9$$

Da $F(x)$ også skal gå gennem dette punktet løses $F(2) = 9$ for k

$$-\frac{3}{2} \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + k = 9$$

$$-6 + 16 + k = 9$$

$$10 + k = 9$$

$$k = -1$$

Stamfunktionen til f som har linjen med ligningen $y = 2x+5$ som tangent er $F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 8x - 1$