Bevissamling i differentialregning

Indholdsfortegnelse

Differentialkvotienten for kendte funktioner

Differentialkvotienten for en lineær funktion

Sætning:
Den lineære funktion med forskriften
$$f(x) = ax + b$$
er differentiabel med differentialkvotienten
$$f'(x_0) = a.$$

Bevis:
Se beviset for sætning 1 i afsnit 3.3 i A2-bogen.

Differentialkvotienten for x^2

Sætning:

Andengradspolynomiet med forskriften

$$f(x) = x^2$$

er differentiabel med differentialkvotienten

$$f'(x_0) = 2x_0.$$

Bevis:

Video:

En videogennemgang af beviset findes her: https://www.frividen.dk/differentialregning-a/ (vælg video 16). Vær dog opmærksom på, at hun i videoen skriver Δf, og det er det samme, som vi normalt kalder Δy.

Tekst:

Vi anvender tretrinsreglen:

1. Vi bestemmer y-tilvæksten:

   $$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) = (x_0 + h)^2 - x_0^2.$$

   Jf. 1. kvadratsætning er $(x_0 + h)^2 = x_0^2 + h^2 + 2x_0h$ og indsættes dette i udtrykket ovenover får vi, at

   $$\Delta y = x_0^2 + h^2 + 2x_0h - x_0^2 = h^2 + 2x_0h.$$

   Vi ved altså nu, at $\Delta y = h^2 + 2x_0h$.

2. Vi bestemmer nu differenskvotienten/sekanthældningen:

   $$\frac{\Delta y}{h} = \frac{h^2 + 2x_0h}{h} = h + 2x_0.$$

   Vi ved nu, at $\frac{\Delta y}{h} = h + 2x_0$.

3. Vi undersøger nu, hvad der sker med differenskvotienten

   $$\frac{\Delta y}{h} = h + 2x_0,$$

   når h går mod 0. Da h ikke indgår i leddet $2x_0$, så ændres dette led ikke, når h går mod 0. Derimod vil leddet h gå mod 0, når h går mod 0. Således har vi følgende:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 2x_0) = 2x_0,$$

Da grænseværdien eksisterer, er f differentiabel i x_0, og grænseværdien er differentialkvotienten. Dvs. $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{h} = 2x_0$. Beviset er hermed gennemført.

Differentialkvotienten for x^3

Sætning:

Tredjegradspolynomiet med forskriften

$$f(x) = x^3$$

er differentiabel med differentialkvotienten

$$f'(x_0) = 3x_0^2.$$

Bevis:

Video:

En videogennemgang af beviset findes her: https://vibkat-my.sharepoint.com/:v:/g/personal/klj_vibkat_dk/EQdi3zgq1TlPmP4zsTEj_j8B7qxV_u9nd_2N23RHTE5FKw

Tekst:

Vi anvender tretrinsreglen:

1. Vi bestemmer y-tilvæksten:

   $$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) = (x_0 + h)^3 - x_0^3.$$

   Vi ved, at $(x_0 + h)^3 = (x_0 + h) \cdot (x_0 + h) \cdot (x_0 + h)$, og ganger vi disse tre parenteser sammen (prøv selv!), får vi at

   $$(x_0 + h)^3 = x_0^3 + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3.$$

   Indsætter vi dette i udtrykket for Δy, får vi, at

   $$\Delta y = (x_0 + h)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3 - x_0^3 = 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3.$$

   Vi ved altså nu, at $\Delta y = 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3$.

2. Vi bestemmer nu differenskvotienten/sekanthældningen:

   $$\frac{\Delta y}{h} = \frac{3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3}{h} = \frac{h \cdot (3x_0^2 + 3x_0 h + h^2)}{h} = 3x_0^2 + 3x_0 h + h^2.$$

   Vi ved nu, at $\frac{\Delta y}{h} = 3x_0^2 + 3x_0 h + h^2$.

3. Vi undersøger nu, hvad der sker med differenskvotienten

   $$\frac{\Delta y}{h} = 3x_0^2 + 3x_0 h + h^2,$$

når h går mod 0. Da h ikke indgår i leddet $3x_0^2$, så ændres dette led ikke, når h går mod 0. Derimod vil de to øvrige led gå mod 0, når h går mod 0. Således har vi følgende:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} = \lim_{h\to 0}(3x_0^2 + 3x_0h + h^2) = 3x_0^2.$$

Da grænseværdien eksisterer, er f differentiabel i x_0, og grænseværdien er differentialkvotienten. Dvs. $f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} = 3x_0^2$. Beviset er hermed gennemført.

Differentialkvotienten for kvadratroden af x

Sætning:

Funktionen

$$f(x) = \sqrt{x}$$

er differentiabel med differentialkvotienten

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Bevis:

Video:

En videogennemgang af beviset findes her: https://www.youtube.com/watch?v=Q3WWjM2UvY8

Tekst: Se beviset for sætning 4 i afsnit 3.3 i A2-bogen.

Differentialkvotienten for 1/x

Sætning:

Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

er differentiabel med differentialkvotienten

$$f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Bevis:

Video:

En videogennemgang af beviset findes her: https://vibkat-my.sharepoint.com/:v:/g/personal/klj_vibkat_dk/EZpR8LA6qFFLrAnLslRSyT8B01AEx5Eosqu_LGmMMvW4vg?e=snvFEV

Tekst:

Vi anvender tretrinsreglen:

1. Vi bestemmer y-tilvæksten:

$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0}.$$

Brøkerne skal have den samme nævner, før vi kan trække dem fra hinanden. Derfor danner vi først en fællesnævner for brøkerne $\frac{1}{x_0+h}$ og $\frac{1}{x_0}$ ved at forlænge hver brøk med den anden brøks nævner (lighedstegn 2 nedenfor). Derefter trækker vi dem fra hinanden (lighedstegn 3 nedenfor):

$$\Delta y = \frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0} = \frac{1 \cdot x_0}{(x_0 + h) \cdot x_0} - \frac{1 \cdot (x_0 + h)}{x_0 \cdot (x_0 + h)} = \frac{x_0 - (x_0 + h)}{(x_0 + h) \cdot x_0} = \frac{-h}{(x_0 + h) \cdot x_0}$$

Vi ved altså nu, at $\Delta y = \frac{-h}{(x_0+h)\cdot x_0}$.

2. Vi bestemmer nu differenskvotienten/sekanthældningen:

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{\left(\frac{-h}{(x_0 + h) \cdot x_0}\right)}{h} = \frac{-h}{(x_0 + h) \cdot x_0 \cdot h} = \frac{-1}{(x_0 + h) \cdot x_0} = \frac{-1}{x_0^2 + hx_0}$$

I lighedstegn 2 ovenfor bruger vi regneregel 12 i formelsamlingen. Vi ved nu, at $\frac{\Delta y}{h} = \frac{-1}{x_0^2+hx_0}$.

3. Vi undersøger nu, hvad der sker med differenskvotienten

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{-1}{x_0^2 + hx_0},$$

når h går mod 0. Tælleren i brøken afhænger ikke af h og ændres derfor ikke, når h går mod 0. Nævneren $x_0^2 + hx_0$ går mod x_0^2 for h gående mod 0, og derfor får vi følgende:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{-1}{x_0^2 + hx_0}\right) = \frac{-1}{x_0^2}.$$

Da grænseværdien eksisterer, er f differentiabel i x_0, og grænseværdien er differentialkvotienten. Dvs. $f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} = \frac{-1}{x_0^2}$. Beviset er hermed gennemført.

Bevis for regneregler

Sumreglen

Sætning:

Hvis funktionerne f og g er differentiable i x_0, så er summen af dem også differentiabel i x_0 med differentialkvotienten

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Bevis:

Se beviset for sætning 2 i afsnit 3.4 i A2-bogen.

Produktreglen

Sætning:

Antag at funktionerne f og g er differentiable i x_0. Så er funktionen

$$j(x) = f(x) \cdot g(x)$$

differentiabel i x_0 med differentialkvotienten

$$j'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Bevis:

Video:

En kort gennemgang: https://vibkat-my.sharepoint.com/:v:/g/personal/klj_vibkat_dk/ERKTJZWtGBlGq7jrrsHBvkgBglD0839sc527R63ZABBsfg?nav=eyJyZWZlcnJhbEluZm8iOnsicmVmZXJyYWxBcHAiOiJPbmVEcml2ZUZvckJ1c2luZXNzIiwicmVmZXJyYWxBcHBQbGF0Zm9ybSI6IldlYiIsInJlZmVycmFsTW9kZSI6InZpZXciLCJyZWZlcnJhbFZpZXciOiJNeUZpbGVzTGlua0NvcHkifX0&e=vcnYEd

En lang gennemgang: https://vibkat-my.sharepoint.com/:v:/g/personal/klj_vibkat_dk/ES1XLCZ4nX5BmQFbh5kKpjEBgxqpFedSG6ttaEclCasDIA?e=IK54IN

Tekst: Se beviset for sætning 4 i afsnit 3.4 i A2-bogen.