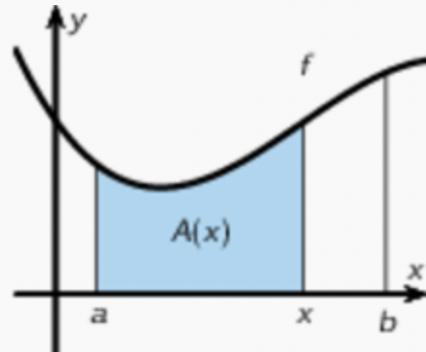


Sætning 1: Integralregningens hovedsætning, del 1

Lad f være en ikke-negativ og kontinuert funktion i et interval $[a; b]$.

Lad endvidere arealfunktionen, A , være fastlagt ved, at $A(x)$ angiver arealet af punktmængden mellem x -aksen og grafen for f i intervallet $[a; x]$, hvor x tilhører $[a; b]$.



Der gælder nu:

$$A'(x) = f(x)$$

Dvs. A er en stamfunktion til f .

Bevis

Vi skal vise, at $A(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$. Det vil med andre ord sige, at vi skal vise, at $A'(x) = f(x)$.

Vi minder om, at differentialkvotienten $A'(x_0)$ bestemmes ved at undersøge differenskvotientens grænseværdi for $h \rightarrow 0$. Differenskvotienten for $A(x)$ er givet ved

$$\frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h}.$$

Målet er således at undersøge, hvad der sker med denne brøk, når $h \rightarrow 0$.

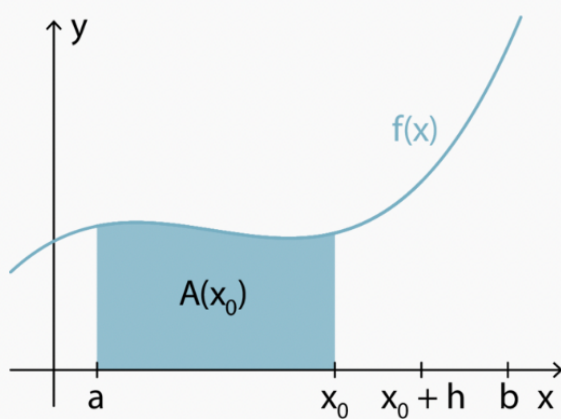
Vi ser på et vilkårligt punkt x_0 i $]a; b[$ samt punktet $x_0 + h$.

Af hensyn til de figurer, der gøres brug af i beviset, gør vi følgende antagelser om $f(x)$:

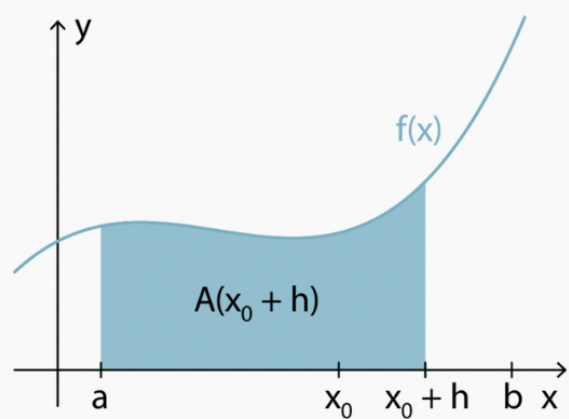
- Tilvæksten h regnes positiv, således at punktet $x_0 + h$ ligger til højre for x_0 .
- $f(x)$ er voksende i et interval til højre for x_0 .

Disse betingelser er ikke nødvendige for sætningens gyldighed, men gør beviset nemmere at gennemføre.

På figur 7 og 8 angiver $A(x_0)$ og $A(x_0 + h)$ de markerede områders arealer.

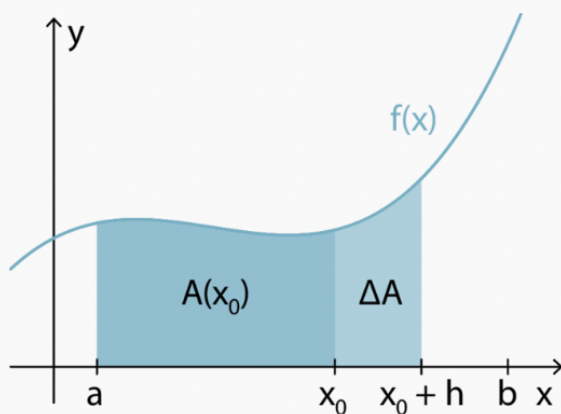


Figur 7

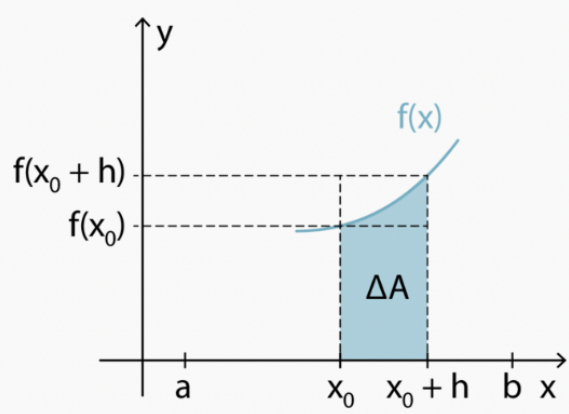


Figur 8

Forskellen mellem $A(x_0)$ og $A(x_0 + h)$ betegner vi med ΔA (se figur 9).



Figur 9

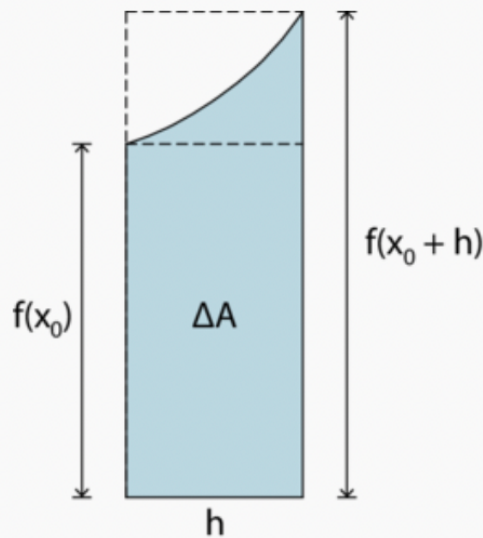


Figur 10

Det gælder dermed, at

$$\Delta A = A(x_0 + h) - A(x_0).$$

På figur 10 er indtegnet to rektangler omkring grafen for $f(x)$ i området $[x_0; x_0 + h]$. Vi zoomer nu ind på dette område af grafen:



Figur 11

Af figur 11 fremgår det, at figuren med arealet ΔA er sluttet inde mellem disse to rektangler: Det ene rektangel har sidelængderne h og $f(x_0)$, og det andet rektangel har sidelængderne h og $f(x_0 + h)$. De to rektangler har arealerne $h \cdot f(x_0)$ og $h \cdot f(x_0 + h)$. Idet $f(x)$ er voksende i intervallet $[x_0; x_0 + h]$, gælder det, at

$$h \cdot f(x_0) \leq \Delta A \leq h \cdot f(x_0 + h).$$

Da $h > 0$ kan vi dividere med h uden at ændre ulighedstegnene:

$$f(x_0) \leq \frac{\Delta A}{h} \leq f(x_0 + h).$$

Idet $\Delta A = A(x_0 + h) - A(x_0)$, kan uligheden skrives sådan:

$$f(x_0) \leq \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h).$$

Det midterste udtryk i denne ulighed er netop differenskvotienten for $A(x)$. For at vurdere, hvad denne differenskvotient går mod, når $h \rightarrow 0$, bruger vi et såkaldt "klemmeargument", idet vi undersøger grænseværdien for venstre og højre side af uligheden:

- Fordi $f(x_0)$ ikke afhænger af h , gælder det, at $f(x_0) \rightarrow f(x_0)$ for $h \rightarrow 0$.
- Fordi $f(x)$ er kontinuert, gælder det, at $f(x_0 + h) \rightarrow f(x_0)$ for $h \rightarrow 0$.

Differenskvotienten $\frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}$ er således "klemmt inde" mellem to størrelser, der begge går mod $f(x_0)$ for $h \rightarrow 0$. Vi kan dermed konkludere, at

$$\frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \rightarrow f(x_0) \text{ for } h \rightarrow 0.$$

Differenskvotientens grænseværdi er $f(x_0)$ for $h \rightarrow 0$, hvilket er ensbetydende med, at $A'(x_0) = f(x_0)$. Da x_0 var et vilkårligt punkt i intervallet $]a; b[$, gælder det, at $A'(x) = f(x)$. $A(x)$ er således en stamfunktion til $f(x)$.

Man kan med små modifikationer også gennemføre beviset, når $h < 0$, og når $f(x)$ ikke er voksende til højre for x_0 . Det vil vi dog undlade hér.