Volumen af et omdrejningslegeme.

For at bevise formlen til bestemmelse af volumen af et omdrejningslegeme bliver vi ligesom for arealet af en punktmængde nødt til at indføre en volumenfunktion.

Volumenfunktionen defineres for en kontinuert ikke-negativ funktion på intervallet som den funktion der beregner volumen af omdrejningslegemet der fremkommer når grafen for roteres 360 om 1. aksen i intervallet , se figur nedenfor.

Et billede, der indeholder linje/række, diagram, Børnekunst, Kurve

Automatisk genereret beskrivelse

Ud fra denne definition må der gælde at og svarer til volumen af hele det omdrejningslegeme der fremkommer når grafen for i intervallet roteres om 1. aksen.

**Sætning**

Lad være kontinuert og ikke-negativ i intervallet og lad være volumenfunktionen for i intervallet . Så gælder

1. At er en stamfunktion til .
2. At .

**Bevis:**

For at bevise (1) skal vi vise at for at gøre dette skal vi benytte tretrinsreglen til at vise at sekanthældningen for har en grænseværdi og at denne grænseværdi er . Da vi ikke kender et funktionsudtryk for bliver vi nødt til at vurderer sekanthældningen i stedet for at benytte tretrinsreglen på traditionel vis.

Vi viser det i det tilfælde hvor er en voksende funktion i intervallet og .

Vi vælger et i intervallet og et i intervallet .

Volumen af det omdrejningslegeme der dannes når grafen for roteres 360 om 1. aksen i intervallet er se figur nedenfor.

Et billede, der indeholder diagram, linje/række, Kurve, tekst

Automatisk genereret beskrivelse

Vi indtegner nu en cylinder med radius og højde h, som må have volumen og en anden cylinder med radius og højde h, som må have volumen se figur nedenfor.

Et billede, der indeholder linje/række, diagram, Kurve, Parallel

Automatisk genereret beskrivelse

Vi kan nu opstille følgende ulighed

Vi ser nu at det netop er sekanthældningen for Volumenfunktionen der står i midten af uligheden og vi har altså nu vurderet størrelsen af den.

Vi går derfor til trin 3 af tretrinsreglen og lader

Da er kontinuert i gælder at for og det følger deraf at

Derfor må følgende gælde for sekanthældningen for volumenfunktionen.

Da sekanthældningen har en grænseværdi, er volumenfunktionen differentiabel i og da grænseværdien er er dette differentialkvotienten for og dermed er , og dermed er en stamfunktion til .

Bevis for (2), da vi nu ved at er en stamfunktion til følger det at.