



Differentialligninger

Supplerende noter til emnet differentialligninger. En del eksempler er gennemgået med løsning i TI-Nspire CAS. I disse eksempler er det meningen, at læseren selv skal indtaste de samme kommandoer i TI-Nspire og få programmet til at give samme svar som i teksten. Hvis en enkelt indtastning skulle drille, kan man som en sidste udvej kopiere kommandoen (alt det med blå) direkte over i et matematikfelt i TI-Nspire.

DL.1 Introduktion

Ligningen

$$f'(x) = 3x + 2$$

er et eksempel på en differentialligning. Når vi omtaler udsagnet som en ligning er det funktionen f , der er den ubekendte. Hvis vi skal løse ligningen skal vi altså finde alle de funktioner, der gør udsagnet sandt, dvs. vi skal finde alle de funktioner, hvis differentialkvotient er $h(x) = 3x + 2$. Vi skal altså finde alle stamfunktioner til $h(x)$. Vi kender løsningen fra integralregning

$$f(x) = \int h(x) dx = \int (3x + 2) dx = \frac{3}{2}x^2 + 2x + k$$

Bemærk at ligningen har uendeligt mange løsninger: en løsning for hver værdi af k . Funktionen med forskrift $g(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + 2$ er én løsning til differentialligningen og kaldes for en *partikulær løsning*. Den generelle løsning $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + k$, hvor k er uspecificeret kaldes for den *fuldstændige løsning*. En partikulær løsning og den fuldstændige løsning er begge *eksakte løsninger*, hvorved vi forstår, at løsningen har en konkret forskrift, som vi kan kontrollere opfylder ligningen.

Differentialligningen i eksemplet kaldes for et *stamfunktionsproblem*, fordi ligningen kan løses ved at integrere mht. x . I eksemplet er x den uafhængige variabel og $f(x)$ den afhængige variabel.

DL.2 Definitioner

Definition DL.2.1. Ved en differentialligning forstås en ligning, hvor den ubekendte er en funktion, og hvor den ubekendtes differentialkvotient indgår.

Bemærkning. Kært barn har mange navne og differentialkvotienten kan skrives på mange måder. Her er et par eksempler

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f(x))$$

I disse eksempler er den uafhængige variabel x og den afhængige variabel $y = f(x)$. Ofte vil disse variable have andre navne, så kan man fx møde differentialkvotienter skrevet som

$$V', \quad \frac{dI}{dt}, \quad s'(t), \quad \frac{d}{ds}(U(s)), \quad \frac{dx}{dt}$$

og utallige andre måder. I det sidste eksempel er t den uafhængige variabel, hvorimod x er den afhængige variabel. Sådant en skrivemåde møder vi sjældent i matematik, men ofte i fysik.

I det følgende vil vi bruge alle disse skrivemåder uden yderligere bemærkning.

Eksempel DL.2.2. Ligningen

$$y' = \frac{3x^2}{y}$$

er et eksempel på en differentialligning. Her er det underforstået at løsningen er en funktion af den uafhængige variabel x , dvs. vi leder efter en funktion, f , der opfylder

$$f'(x) = \frac{3x^2}{f(x)}$$

Bemærk, at y erstattes med funktionen f , hvorimod, den uafhængige variabel, x , blot bliver stående. Begge skrivemåder er accepterede måder at skrive differentialligningen på.

Det er ikke let at gætte en løsning her, men det viser sig at funktionen med forskrift

$$f(x) = \sqrt{2x^3 + 16}$$

er en af mange løsninger (alle løsninger har en form der minder om f , som vi skal se i afsnittet om separable differentialligninger Afsnit [DL.11](#)).

Opgave DL.2.3. Vis vha. kæderegele at $f(x) = \sqrt{2x^3 + 16}$ er en løsning til $y' = \frac{3x^2}{y}$. Find en løsning mere til ligningen. Funktionen f er defineret for alle $x \geq -2$, gælder det også din løsning?

Matematik siges nogle gange, at være centreret om det at løse ligninger og i emnet differentialligninger drejer det sig om, som vi så ovenfor, at finde en funktion, der opfylder differentialligningen.

Definition DL.2.4. En løsning til en differentialligning er en funktion, der gør ligningen sand. Grafen for en løsning kaldes for en løsningskurve.

Hvis man finder en konkret forskrift for en funktion, der er løsning til en differentialligning så kalder vi funktionen for en *partikulær løsning*. Hvis man finder samtlige løsninger til en differentialligning, så taler vi om den *fuldstændige løsning*. En partikulær løsning såvel som den fuldstændige løsning er eksempler på *eksakte løsninger*, hvor man har en forskrift, som man kan vise opfylder ligningen. I modsætning til de eksakte løsninger står såkaldte *numeriske løsninger*, hvor man enten må opgive, eller ikke er interesseret i den konkrete forskrift, men stiller sig tilfreds med en kurve, der tilnærmer en løsningskurve.

Ovenfor har vi kun set på differentialkvotienter af den ubekendte funktion, men af og til optræder differentialkvotienten af en differentialkvotient, en såkaldt *dobbelt-afledet*

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$$

eller i eksempler med andre variabelnavne

$$V'', \quad \frac{d^2 I}{dt^2}, \quad s''(t), \quad \frac{d^2}{ds^2}(U(s)), \quad \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Man kan også se på afledede af højere orden, hvor man fx differentierer 4 gange

$$y^{(4)} = f^{(4)}(x) = \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d^4}{dx^4}(f(x))$$

eller i eksempler med andre variabelnavne

$$V^{(4)}, \quad \frac{d^4 I}{dt^4}, \quad s^{(4)}(t), \quad \frac{d^4}{ds^4}(U(s)), \quad \frac{d^4 x}{dt^4}$$

Definition DL.2.5. En differentialligning, hvor der kun optræder differentialkvotienter af første orden kaldes for en første ordens differentialligning. Hvis der optræder differentialkvotienter af anden orden, men ingen højere, taler vi om en anden ordens differentialligning. Hvis der optræder en differentialkvotient af n'te orden taler vi om en n'te ordens differentialligning.

Vi vil primært fokusere på første ordens differentialligninger.

DL.2.1 At gøre prøve

Eksempel DL.2.6. Differentialligningen

$$y' = 8 - 4y$$

er af første orden. Den har den partikulære løsning $f(x) = 2 + 3e^{-4x}$. Dette kan vises ved *at gøre prøve*, hvor vi simpelthen indsætter forskriften i ligningen. Venstresiden giver ved indsættelse af $y = f(x)$

$$y' = f'(x) = 3(-4)e^{-4x} = -12e^{-4x}$$

Ved indsættelse på højresiden får vi

$$8 - 4y = 8 - 4f(x) = 8 - 4(2 + 3e^{4x}) = 8 - 8 - 12e^{-4x} = -12e^{-4x}$$

Vi ser at højre- og venstreside giver samme resultat, så f er en løsning til ligningen $y' = 8 - 4y$. Grafen for f er derfor en løsningskurve for ligningen.

Vi kan også se på funktionen $g(x) = 2 + 7e^{-4x}$. På helt samme måde som ovenfor kan man vise, at g er en løsning til differentialligningen. Vi skal senere se, at enhver funktion af formen $h(x) = 2 + ce^{-4x}$, hvor c er et tal, er en løsning. Vi skal også se, at der ikke er flere løsninger end netop funktioner af denne form.

Opgave DL.2.7. Vis $h(x) = 2 + ce^{-4x}$ er en løsning til $y' = 8 - 4y$ for alle værdier af c ved at gøre prøve.

DL.3 Begyndelsesværdiproblem

Ovenfor så vi eksempler på, at differentialligninger har (uendeligt) mange forskellige løsninger. Men ofte er en differentialligning ledsaget med en oplysning om, at der efterspørges en løsningskurve, der går gennem et bestemt punkt. Som regel er det specificeret ved at kræve en bestemt funktionsværdi for funktionen, den såkaldte *begyndelsesværdi*. Tit er det $f(0)$, der specificeres, men andre x -værdier anvendes også.

Eksempel DL.3.1. Vi vil løse begyndelsesværdiproblemet

$$y' = 8 - 4y, \quad y(0) = 3$$

Vi søger altså en funktion f , der opfylder at

$$f'(x) = 8 - 4f(x)$$

og at $f(0) = 3$. Vi har allerede set ovenfor, at $f(x) = 2 + ce^{-4x}$ løser differentialligningen, så vi skal nu bestemme c så $f(0) = 3$. Vi ser, at

$$3 = f(0) = 2 + ce^{-4 \cdot 0} = 2 + ce^0 = 2 + c$$

Dvs. at $c = 1$, så den eftersøgte løsning til begyndelsesværdiproblemet er $f(x) = 2 + e^{-4x}$.

Løsning i TI-Nspire CAS I TI-Nspire kan vi også isolere konstanten c . Først skal vi sørge for at gemme det generelle udtryk for f

$$f(x) := 2 + c \cdot e^{-4x} \quad \text{Udført}$$

og derefter kan vi, som vi plejer, isolere c

$$\text{solve}(f(0) = 3, c) \quad \text{c=1}$$

Vi kan også vha. kommandoen `right` gemme svaret

```
c:=right(solve(f(0)=3,c))▶ 1
```

Vi har nu fundet løsningen til begyndelsesværdiproblemet

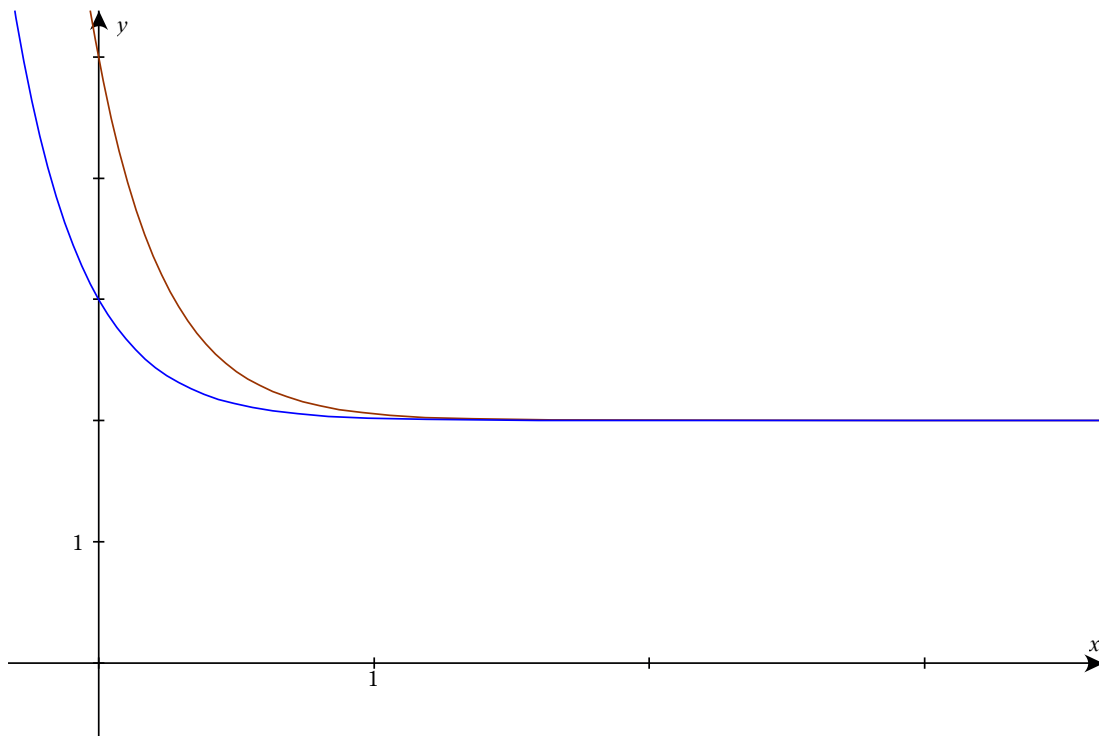
```
f(x)▶ e-4x + 2
```

Opgave DL.3.2. Løs begyndelsesværdiproblemerne (enten i hånden eller vha. et værktøjsprogram)

$$y' = 8 - 4y, \quad y(0) = 0$$

og

$$y' = 8 - 4y, \quad y(-\ln(2)) = 34$$



Figur DL.1: To løsningskurver til differentialligningen $y' = 8 - 4y$

DL.4 Stamfunktionsproblemer

En helt særlig type differentialligning er en ligning, hvor venstresiden er en differentialkvotient og højresiden er en funktion, der kun involverer den uafhængige variabel.

$$y' = h(x)$$

En sådan differentialligning kaldes et stamfunktionsproblem og løsningen kendes fra integralregning. Ligningen siger nemlig intet andet, end at y er en stamfunktion til h . Vi har allerede en skrivemåde for den fuldstændige løsning

$$f(x) = \int h(x) dx$$

Hvis vi bliver bedt om at finde en stamfunktion, hvis graf går gennem et bestemt punkt, så er der tale om et stamfunktionsproblem med *begyndelsesbetingelse*

Eksempel DL.4.1. Vi vil løse stamfunktionsproblemet

$$I'(t) = \sin(t) + 2$$

med begyndelsesbetingelsen $I(\pi) = 4\pi + 1$. Den fuldstændige løsning til differentialligningen $I'(t) = \sin(t) + 2$ er (bemærk den uafhængige variabel er t og den afhængige variabel er I)

$$I(t) = \int (\sin(t) + 2) dt = -\cos(t) + 2t + k$$

Vi isolerer k i ligningen $I(\pi) = 4\pi + 1$

$$-\cos(\pi) + 2\pi + k = 4\pi + 1$$

$$-(-1) + 2\pi + k = 4\pi + 1$$

$$k = 2\pi$$

Forskriften for I er således $I(t) = -\cos(t) + 2t + 2\pi$.

Løsning i TI-Nspire CAS I TI-Nspire kan vi også løse stamfunktionsproblemet.

Vær opmærksom på, at her optræder sinus og cosinus som funktioner, så husk at indstille TI-Nspire til at regne i radianer.

Vi bestemmer først stamfunktion til højresiden af differentialligningen

$$\mathbf{ik}(t) := \text{integral}(\sin(t) + 2, t) + k \blacktriangleright \text{Udført}$$

Nspire laver selv notationen om til standard matematiknotation og skriver

$$\mathbf{ik}(t) := \int (\sin(t) + 2) dt + k \blacktriangleright \text{Udført}$$

Vi har fundet den foreløbige forskrift

$$\mathbf{ik}(t) \blacktriangleright -\cos(t) + 2t + k$$

Vi kan isolere k i ligningen $I(\pi) = 4\pi + 1$

$$\text{solve}(\mathbf{ik}(\pi) = 4 \cdot \pi + 1, k) \blacktriangleright k = 2 \cdot \pi$$

og vi kan gemme som en betingelse på k

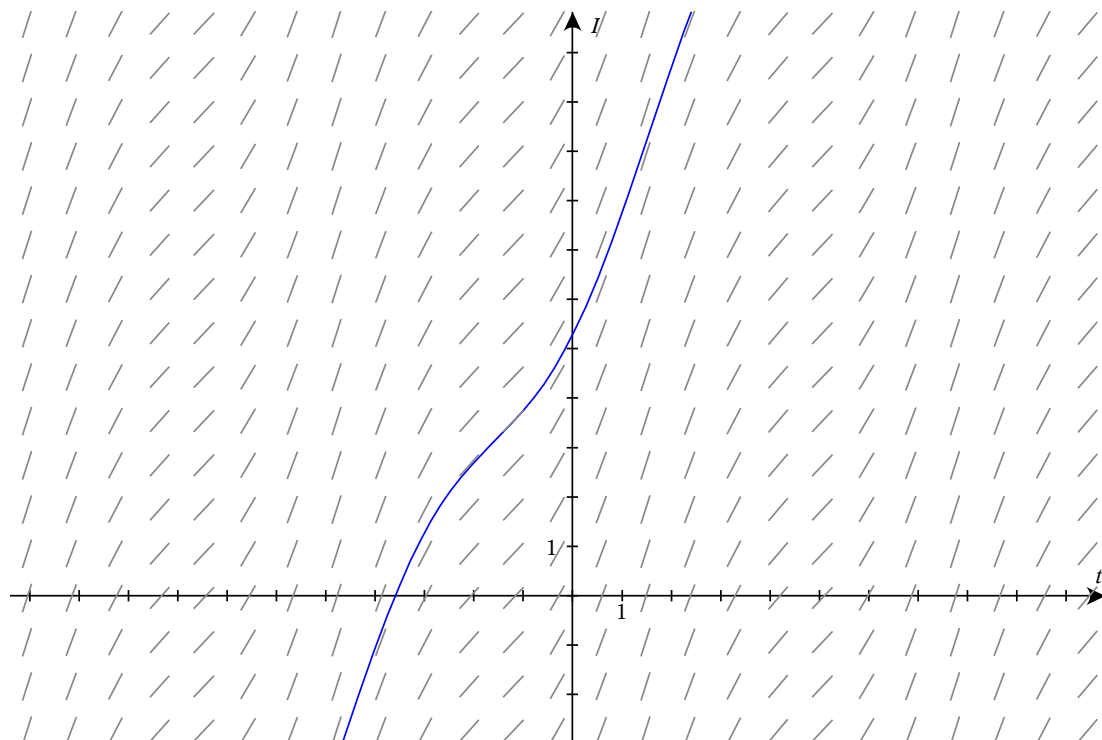
kbetingelse:=solve(ik(π) = $4 \cdot \pi + 1, k$) ► $k = 2 \cdot \pi$

Vi gemmer nu den endelige forskrift for I

i(t):=ik(t) | kbetingelse ► Udført

Nu har vi fundet forskriften for $I(t)$

i(t) ► $-\cos(t) + 2t + 2 \cdot \pi$



Figur DL.2: Grafen for $I(t) = -\cos(t) + 2t + 2 \cdot \pi$

Opgave DL.4.2. Løs stamfunktionsproblemerne med begyndelsesbetingelse

$$f'(t) = 2t + 4, \quad f(0) = 3$$

$$y' = 0, \quad y(0) = 0$$

$$y' = e^x + 12, \quad y(\ln(2)) = 2$$

DL.5 Sproglig formulering af en differentialligning

Differentialligninger beskriver hvorledes en funktion udvikler sig. Differentialkvotienten (som jo indgår i en differentialligning) er det samme som *væksthastigheden*.

I nogle sammenhænge har man ikke på forhånd givet en differentialligning. I stedet beskriver man udviklingen sprogligt. Det kan være en beskrivelse af *med hvilken hastighed* en bestemt population udvikler sig, eller en beskrivelse vha. tangenthældninger. Når vi opstiller differentialligninger på baggrund af en sproglig forklaring bruger vi vores viden om betydningen af de matematiske begreber.

Eksempel DL.5.1. Om en funktion $f(x)$ oplyses det, at den vokser med en hastighed, der er proportional med differensen mellem x og 2, hvor proportionalitetsfaktoren er 5. Vi vil opstille en differentialligning, der udtrykker denne oplysning.

Den hastighed hvormed funktionen vokser er differentialkvotienten $f'(x)$. Differensen mellem x og 2 er $x - 2$. Oplysningen om at $f'(x)$ er proportional med $x - 2$ med proportionalitetsfaktor 5 kan således skrives

$$f'(x) = 5(x - 2)$$

Opgave DL.5.2. Om funktionen f får vi at vide, at alle tangenternes hældning er den samme. Opskriv en differentialligning som f opfylder.

Opgave DL.5.3. Om funktionen f oplyses, at den er differentiabel, og at væksthastigheden er proportional med differensen mellem 20 og funktionsværdien. Proportionalitetsfaktoren er 0,3. Bestem en differentialligning som f opfylder.

Opgave DL.5.4. Det oplyses om en funktion $I(x)$ den vokser med en hastighed, der er proportional med $I(x)$, hvor proportionalitetsfaktoren er 0,41. Opskriv en differentialligning som I opfylder.

Opgave DL.5.5. Om en differentiabel funktion U af tiden t oplyses det at væksthastigheden til tidspunktet t er givet ved udtrykket $t^2 + 4t$. Opskriv en differentialligning som U opfylder.

DL.6 Kvalitativ analyse af en differentialligning

Uden at løse en differentialligning kan man godt udtale sig om fx udseendet af løsningskurver eller visse egenskaber, som en løsning nødvendigvis må have. Her taler man om en *kvalitativ analyse*, fordi man endnu ikke har en konkret forskrift at udtale sig på baggrund af.

Som det første eksempel på denne metode vil vi bestemme ligningen for tangenten til en løsningskurve (uden at kende forskriften for den tilhørende løsning)

Eksempel DL.6.1. Vi ser på differentialligningen

$$y' = y(12 - y) + 12x$$

Vi vil bestemme ligningen for tangenten til den løsningskurve, som går gennem punktet $(-2, 12)$. Antag at f er en løsning, hvis graf, går gennem punktet $(-2, 12)$. Så er jo på den ene side

$$f'(x) = f(x)(12 - f(x)) + 12x$$

og på den anden side er $f(-2) = 12$.

Hvis vi vil bestemme en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $(-2, 12)$ kan vi bruge den generelle form for tangentens ligning

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Her er $x_0 = -2$ og $f(x_0) = f(-2) = 12$. Vi kan udregne $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = f'(-2) = f(-2)(12 - f(-2)) + 12 \cdot (-2) = 12(12 - 12) - 24 = -24$$

Det følger at ligningen for tangenten er

$$y = -24(x - (-2)) + 12 \Leftrightarrow y = -24x - 48 + 12 \Leftrightarrow y = -24x - 36$$

Opgave DL.6.2. Om differentialligningen

$$y' = (y + x)(y - x)$$

oplyses, at den har en løsning, hvis graf går gennem punktet $(0, 2)$. Bestem en ligning for tangenten til grafen for denne løsning i dette punkt.

Opgave DL.6.3. Om differentialligningen

$$y' = y(y - 2x)$$

oplyses, at den har en løsning, hvis graf går gennem punktet $(2, 2)$. Bestem en ligning for tangenten til grafen for denne løsning i dette punkt.

Man kan også blot være interesseret i funktionens væksthastighed til et bestemt tidspunkt

Eksempel DL.6.4. Funktionen f er løsning til differentialligningen

$$f'(t) = \sin(2\pi t) + 3t$$

Vi ønsker at bestemme funktionens væksthastighed til tidspunktet $t = 1$.

Vi kunne gøre dette ved først at løse differentialligningen (der er tale om et stam-funktionsproblem) og derefter differentiere og udregne $f'(1)$.

I stedet vil vi, da det er meget nemmere, bestemme $f'(1)$ direkte fra differential-ligningen

$$f'(1) = \sin(2\pi \cdot 1) + 3 \cdot 1 = \sin(2\pi) + 3 = 0 + 3 = 3$$

Opgave DL.6.5. Om en positiv funktion I oplyses, at den er løsning til differentialligningen

$$\frac{dI}{dt} = (5 - 2t) \cdot I$$

Det oplyses desuden at $I(2) = 4,5$. Bestem væksthastigheden for funktionen I til tidspunktet $t = 2$.

Engang i mellem kan man ud fra differentialligningen bestemme monotoniforhold for (nogle af) løsningerne. Vi vil illustrere metoden med et eksempel.

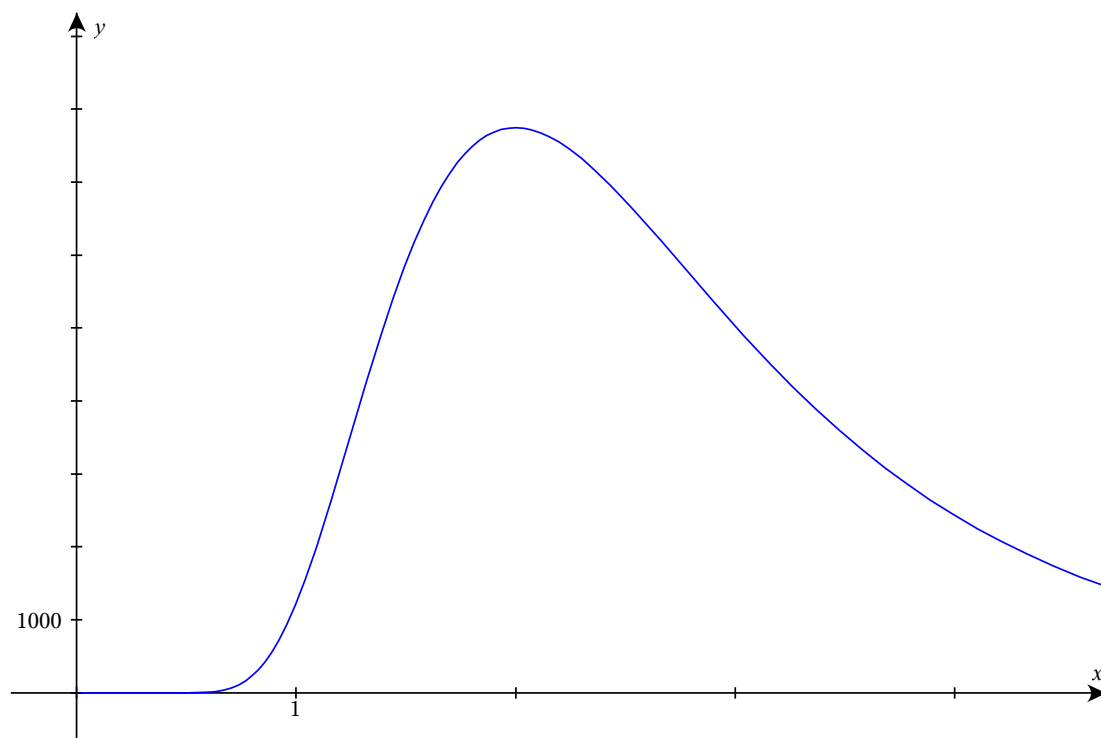
Eksempel DL.6.6. Om en bestemt population oplyses det, at antallet af individer N til tidspunktet t (målt i døgn) er løsning til differentialligningen

$$N'(t) = \frac{12 - 6t}{t^2} N(t)$$

Vi ønsker at bestemme monotoniforhold for N . Vi løser først $N'(t) = 0$

$$N'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{12 - 6t}{t^2} N(t) = 0 \Leftrightarrow (12 - 6t)N(t) = 0 \cdot t^2 = 0 \Leftrightarrow 12 - 6t = 0 \vee N(t) = 0$$

Da N angiver antallet af individer, kan vi antage at $N(t) > 0$. Vi ser at $t = 2$ er den eneste løsning til $N'(t) = 0$. Når $t < 2$ så er $12 - 6t > 0$, dermed er $N'(t) > 0$. Når $t > 2$ så er $12 - 6t < 0$ og dermed er $N'(t) < 0$. Vi ser at N er voksende i intervallet $]0, 2]$ og aftagende i intervallet $[2, \infty[$. Dermed er N størst når $t = 2$, hvor funktionen har maksimum.



Figur DL.3: En løsningskurve hørende til differentialligningen $N'(t) = \frac{12-6t}{t^2} N(t)$. Det ses at funktionen har maksimum, hvor $t = 2$.

Opgave DL.6.7. Vi ser igen på en positiv funktion, I , der er løsning til differential-ligningen

$$\frac{dI}{dt} = (5 - 2t) \cdot I$$

Bestem det tidspunkt hvor I er maksimal.

Opgave DL.6.8. (Svær) Om funktionen f oplyses det, at f tilfredsstiller differential-ligningen

$$y' = y(2 - y)$$

Bestem funktionsværdien i de punkter hvor væksthastigheden er størst mulig.

Opgave DL.6.9. Differentialligningen $y' = y(2 - y)$ har to løsninger, hvis grafer er vandrette linjer. Bestem disse to løsninger.

DL.7 Linjeelementer og retningsfelter

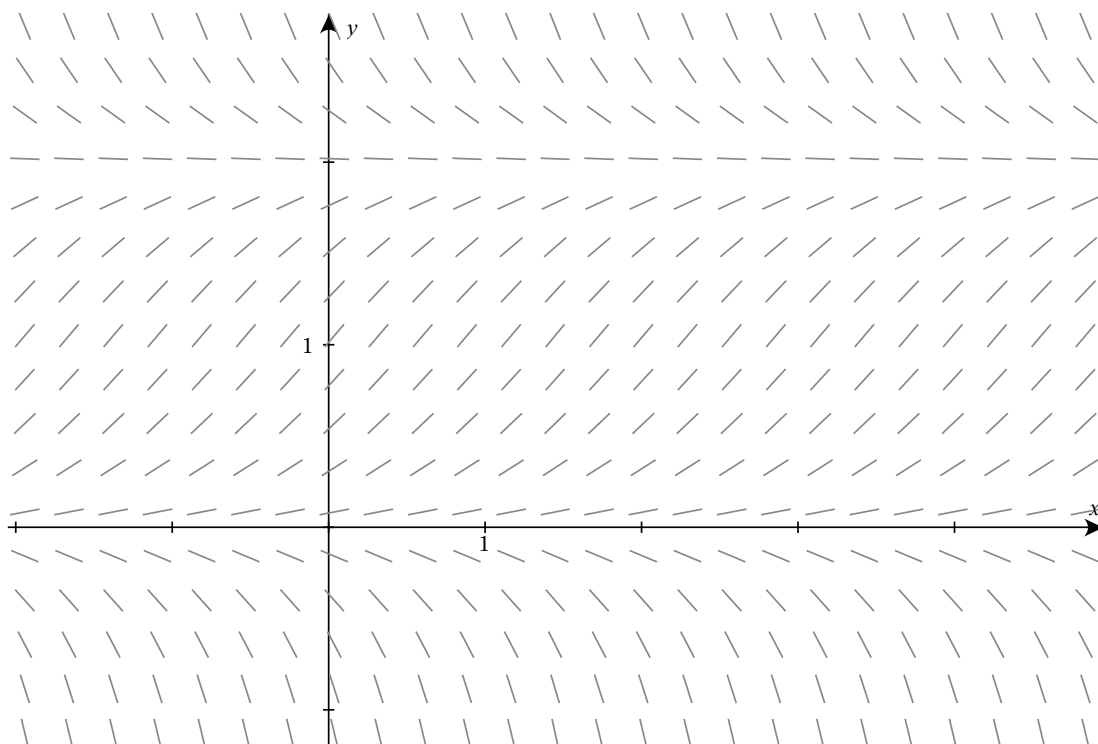
Ved hjælp af et værktøjsprogram som fx TI-Nspire kan man udvide den kvalitative analyse af en differentialligning. Vi så ovenfor, at man ud fra et givet punkt, kunne bestemme en ligning for tangenten til løsningskurven gennem det givne punkt. Hvis man gør det for mange punkter (i praksis flere hundrede) og konstruerer et koordinatsystem, hvor man tegner en lille del af tangenten gennem hvert af punkterne, så kan man danne sig et visuelt billede af hvordan en løsningskurve måske kan forløbe.

Definition DL.7.1. Ved et linjeelement forstås et punkt (x_0, y_0) og en hældning a . Linjeelementet siges at høre til en differentialligning, hvis en løsningskurve gennem punktet (x_0, y_0) har tangenthældningen a i dette punkt. Vi vil tegne et linjeelement, ved at tegne et kort linjestykke gennem punktet (x_0, y_0) med hældning a . Vi skriver (x_0, y_0, a) for linjeelementet, eller, hvis vi vil gøre det klart, at sidste del er en differentialkøtient (x_0, y_0, y'_0) .

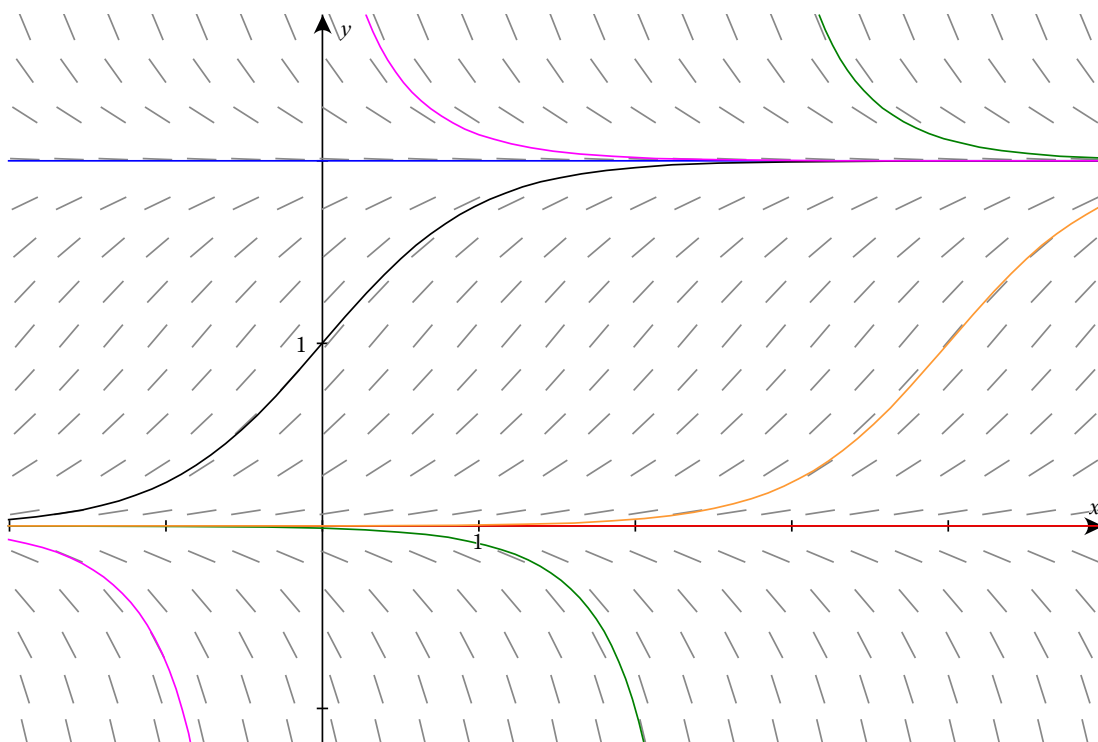
Hvis man tegner nok linjeelementer giver det et billede af, hvordan løsningskurver må forløbe. Husk nemlig, at hvis en løsningskurve går gennem en bestemt punkt, så kender vi dens tangenthældning.

På Figur DL.4 ses linjeelementer hørende til differentialligningen $y' = y(2 - y)$. Figuren kaldes for et *retningsfelt* for differentialligningen. Det ser ud som om, graferne for funktionerne med forskrifter $f(x) = 0$ og $g(x) = 2$ opdeler koordinatsystemet i tre dele. Vi har tidligere set, at disse grafer, faktisk er løsningskurver. Vi ser også at en løsning, hvis løsningskurve, løber i delen over grafen for g er aftagende. Tilsvarende med en løsningskurve, der løber i delen under grafen for f . I delen mellem graferne for f og g er enhver tilhørende løsning voksende.

Opgave DL.7.2. Vis vha. differentialligningen $y' = y(2 - y)$, at en løsning er voksende i punkter hvor $0 < y < 2$, men aftagende i punkter hvor $y < 0$ eller $y > 2$.

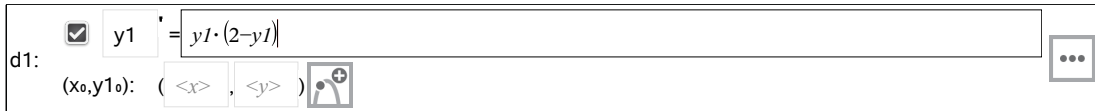


Figur DL.4: Retningsfelt for differentialligningen $y' = y(2 - y)$



Figur DL.5: Retningsfelt og løsningskurver hørende til differentialligningen $y' = y(2 - y)$

På Figur [DL.5](#) ses løsningskurver og linjeelementer hørende til differentialligningen $y' = y(2 - y)$. Bemærk at jo tættere grafen er på et linjeelement jo bedre overensstemmelse er der mellem linjeelementets hældning og grafens tangenthældning.



Figur DL.6: Indtastning af differentialligning i TI-Nspire

Retningsfelt i TI-Nspire CAS I grafmenuen i TI-Nspire kan man tegne et retningsfelt hørende til en given differentialligning, men kun hvis ligningen er skrevet på standardform, hvor venstresiden er differentialkvotienten til den afhængige variabel og højresiden er et udtryk i den afhængige variabel og x (som skal være den uafhængige variabel). I værktøjskassen vælges [3. Grafindtastning/Redigér](#) og her vælges [7. Differentialligning](#). Grafindtastningsfeltet beder nu om $y1'$ (man kan skrive noget andet i stedet for $y1$, hvis man gerne vil). Hvis vi vil tegne et retningsfelt for differentialligningen $y' = y(2 - y)$, så skriver vi $y1 \cdot (2 - y1)$ i feltet. I anden linje kan man indtaste en begyndelsebetingelse, hvis man ønsker, at TI-Nspire forsøger at finde en numerisk løsning (mere præcist at finde en løsningskurve vha. en numerisk metode).

Hvis man klikker på de tre vandrette prikker ude til højre (Redigér parametre) kan man ændre parametre for retningsfeltet. Til vores brug er den relevante parameter *Feltopløsning*, som angiver hvor mange linjeelementer, der tegnes i hver række. En feltopløsning på 25 er fornuftig i de fleste tilfælde.

Opgave DL.7.3. Tegn et retningsfelt hørende til differentialligningen $y' = y - x$. Forsøg ud fra linjeelementerne at gætte en lineær funktion, der er løsning til differentialligningen. Vis at du har gættet rigtigt ved at gøre prøve. Indtegn grafen for funktionen sammen med retningsfeltet.

Opgave DL.7.4. Tegn et retningsfelt hørende til differentialligningen $y' = 2y + x$. Forsøg ud fra linjeelementerne at gætte en lineær funktion, der er løsning til differentialligningen. Vis at du har gættet rigtigt ved at gøre prøve. Indtegn grafen for funktionen sammen med retningsfeltet.

DL.8 Eksistens og entydighed af løsning

Vi anfører følgende sætning, hvis bevis hører til i den temmeligt avancerede ende og derfor ikke medtages her.

Sætning DL.8.1. *Givet et begyndelsesværdiproblem*

$$y' = U(x, y) \text{ og } y(x_0) = y_0$$

hvor U er et passende pænt udtryk i x og y , så findes én entydig funktion f som løser problemet.

Bemærkning. At U skal være et passende pænt udtryk betyder, at alle de udtryk man kan komme i tanker om opfylder forudsætningerne i sætningen. Sætningen siger, at gennem et givet punkt i planen, går præcist én løsningskurve til en given differentialligning. Dvs. sætningen siger to ting: Gennem hvert punkt går en løsningskurve. Gennem hvert punkt går der kun én løsningskurve.

Bemærk at sætningen har som konsekvens at ingen løsningskurver kan skære hinanden. Grafen for en løsning, der er defineret i alle reelle tal vil således dele planen op i to dele, hvor enhver anden løsningskurve, der er defineret for alle reelle tal, vil være helt i den ene af de to dele.

Følgende sætning er en konsekvens af entydighedssætningen ovenfor, men kan også vises direkte. Det vil vi dog ikke gøre her.

Sætning DL.8.2. Hvis en differentiabel funktion, f , opfylder at $f'(x) = 0$ for alle x i et interval, I , så findes et tal c , så $f(x) = c$ for alle $x \in I$. Med andre ord er funktionen konstant i intervallet.

DL.9 Eksponentiel vækst

I beviset for den følgende sætning får vi ud over **Sætning DL.8.2** brug for for en sætning, vi tidligere har set. Det er produktregnereglen, som i matematikslang kan formuleres således

$$(f(x)g(x))' = (f(x))'g(x) + f(x)(g(x))'$$

Sætning DL.9.1. Lad $k \in \mathbb{R}$ være et tal. Differentialligningen

$$y' = k \cdot y$$

har den fuldstændige løsning

$$f(x) = c \cdot e^{kx}$$

Her er $c \in \mathbb{R}$ en vilkårlig konstant.

Bemærkning. Den sidste formulering i sætningen betyder, at for hvert eneste reelt tal c så findes der en løsning til differentialligningen.

Bevis. Vi deler beviset op i to dele. En eksistensdel og en entydighedsdel. I eksistensdelen skal vi vise at der eksisterer løsninger til ligningen. Mere præcist skal vi vise, at de løsninger der er nævnt i sætningen rent faktisk løser ligningen. I entydighedsdelen skal vi vise, at der ikke er flere løsninger, end de, der er nævnt i sætningen (altså at den fuldstændige løsning er entydig, eller at løsningen er den fuldstændige løsning).

Eksistensdel Vi skal vise at $f(x) = c \cdot e^{kx}$ er en løsning til $y' = k \cdot y$. Vi indsætter $y = f(x)$ og udregner

$$y' = f'(x) = c \cdot k \cdot e^{kx} = k \cdot (c \cdot e^{kx}) = k \cdot f(x) = k \cdot y$$

Entydighedsdel I denne del antager vi at funktionen g er en løsning til $y' = k \cdot y$. Vi skal vise at g faktisk har samme form som $f(x) = c \cdot e^{kx}$, så der altså ikke findes andre typer løsninger til ligningen. At g er en løsning betyder at g er differentiabel og at

$$g'(x) = k \cdot g(x).$$

Vi definerer nu en hjælpefunktion

$$h(x) = e^{-kx}g(x).$$

Fordi h er et produkt af to differentiable funktioner, så kan vi differentiere h vha. produktreglen

$$\begin{aligned} h'(x) &= (e^{-kx}g(x))' \\ &= (e^{-kx})'g(x) + e^{-kx}(g(x))' \\ &= -ke^{-kx}g(x) + e^{-kx}kg(x) \\ &= -ke^{-kx}g(x) + ke^{-kx}g(x) = 0 \end{aligned}$$

Vi ser at $h'(x) = 0$ for alle x og dermed findes et reelt tal c , så $h(x) = c$. Vi ved nu at

$$e^{-kx}g(x) = c$$

og herfra følger, at

$$g(x) = \frac{c}{e^{-kx}} = c \cdot e^{kx} = f(x)$$

Vi ser, at g faktisk er skrevet på samme form som f , så vi har fundet alle løsninger. $\square$

Eksempel DL.9.2. Vi vil løse differentialligningen $y' = 2y$. Her er $k = 2$, og vi ser at den fuldstændige løsning er

$$f(x) = c \cdot e^{2x}$$

Vi kan ikke ud fra ligningen alene afgøre, hvad c er.

Eksempel DL.9.3. Vi vil finde en funktion, f , der opfylder at $f'(x) = -2f(x)$ og at $f(0) = 4$. Der er tale om et begyndelsesværdiproblem. Her er $k = -2$, og vi ser at den fuldstændige løsning er

$$f(x) = c \cdot e^{-2x}$$

Ud fra oplysningen af begyndelsesbetingelsen $f(0) = 4$, kan vi bestemme c . Vi ser at

$$4 = f(0) = c \cdot e^{-2 \cdot 0} = c \cdot e^0 = c \cdot 1 = c$$

Den eftersøgte løsning er således

$$f(x) = 4 \cdot e^{-2x}$$

Løsning i TI-Nspire CAS I TI-Nspire kan vi løse ligningen vha. kommandoen **deSolve** (står for *differential equation solve*)

$$\text{deSolve}(y' = -2 \cdot y \text{ and } y(0) = 4, x, y) \blacktriangleright y = 4 \cdot e^{-2 \cdot x}$$

Kommandoen har tre argumenter. Første argument skal være en differentialligning, hvor differentialkvotienten *skal* indtastes som et mærke efter den afhængige variabel. Ligningen kan som i eksemplet indtastes som et begyndelsesværdiproblem, hvor den egentlige ligning og begyndelsesbetingelsen er adskilt af et logisk og (**and**). Andet og tredje argument er henholdsvis den uafhængige og den afhængige variabel (disse to variabelnavne skal stemme overens med notationen i første argument).

Hvis man vil gemme output fra **deSolve**, så kommer man hurtigt i problemer, men løsningen er som følger: Vi skal skifte notation for den uafhængige variabel. I stedet for at bruge x som ovenfor, så bruger vi $x_$. Forklaringen er, at nu kan vi gemme forskriften i TI-Nspire uden at få problemer. Sørg også for at bruge notationen y for den afhængige variabel (og ikke fx f).

$$\text{forskrift} := \text{right}(\text{deSolve}(y' = -2 \cdot y \text{ and } y(0) = 4, x_, y)) \blacktriangleright 4 \cdot e^{-2 \cdot x_}$$

Endeligt kan vi gemme vores løsning som en funktion (her skifter vi tilbage til notationen x for den uafhængige variabel, så notationen passer med den oprindelige ligning)

$$f(x) := \text{forskrift} | x_ = x \blacktriangleright \text{Udført}$$

Vi viser forskriften (læg mærke til, at den uafhængige variabel er x både til højre og venstre)

$$f(x) \blacktriangleright 4 \cdot e^{-2 \cdot x}$$

Eksempel DL.9.4. Vi ser på differentialligningen

$$\frac{ds}{dt} = 1,78 \cdot s(t)$$

Her er den uafhængige variabel t og den afhængige variabel er funktionen $s(t)$. Den fuldstændige løsning til ligningen er

$$s(t) = c \cdot e^{1,78 \cdot t}$$

Uden yderligere information, kan vi ikke bestemme værdien af c .

DL.10 Forskudt eksponentiel vækst

Sætning DL.10.1. Lad $a, b \in \mathbb{R}$ være tal hvor $a \neq 0$. Differentialligningen

$$y' = b - a \cdot y$$

har den fuldstændige løsning

$$f(x) = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$$

Her er $c \in \mathbb{R}$ en vilkårlig konstant.

Bevis. Beviset består af to dele.

Eksistensdel Vi skal vise at $f(x) = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$ er en løsning til $y' = b - a \cdot y$. Vi indsætter $y = f(x)$ og udregner venstresiden

$$y' = f'(x) = c \cdot (-a) \cdot e^{-ax} = -a \cdot c \cdot e^{-ax}$$

og derefter højresiden

$$\begin{aligned} b - a \cdot y &= b - a \left(\frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax} \right) \\ &= b - a \frac{b}{a} - a \cdot c \cdot e^{-ax} \\ &= b - b - a \cdot c \cdot e^{-ax} = -a \cdot c \cdot e^{-ax} \end{aligned}$$

Da venstresiden og højresiden er ens, så er $f(x)$ en løsning til ligningen.

Entydighedsdel I denne del af beviset antager vi, at g er en løsning til $y' = b - a \cdot y$, og vi skal vise, at der findes et $c \in \mathbb{R}$, så $g(x) = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$. At g er løsning til ligningen betyder, at $g'(x) = b - a \cdot g(x)$.

Vi definerer nu en hjælpefunktion

$$h(x) = g(x) - \frac{b}{a}$$

Da h er opbygget af differentiable funktioner, så er h selv differentiablel og vi kan bestemme differentialkvotienten

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(x) \\ &= b - a \cdot g(x) \\ &= -a \cdot \left(-\frac{b}{a} + g(x) \right) \\ &= -a \cdot \left(g(x) - \frac{b}{a} \right) \\ &= -a \cdot h(x) \end{aligned}$$

Vi ser, at $h'(x) = -ah(x)$ for alle x , og dermed løser differentialligningen, der beskriver eksponentiel vækst. Vha. **Sætning DL.9.1** med $k = -a$ findes nu en konstant c , så $h(x) = c \cdot e^{-ax}$. Dvs.

$$g(x) - \frac{b}{a} = c \cdot e^{-ax}$$

Vi kan nu isolere $g(x)$

$$g(x) = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$$

Vi ser, at g har samme form som f , som ønsket. □

Bemærkning DL.10.2. Hvis konstanten c har værdien $c = 0$, så er $f(x) = \frac{b}{a}$, altså den konstante funktion med værdien $\frac{b}{a}$ i alle punkter. Denne løsning kaldes for den *trivielle* løsning. Alle løsningskurver har grafen for den trivielle løsning som vandret asymptote. Grafen for en vilkårlig løsning er en parallelforskydning af grafen for en eksponentialfunktion. Man omtaler derfor de ikke-trivielle løsninger som *forskydte eksponentiel vækst*.

Eksempel DL.10.3. Vi vil løse begyndelsesværdiproblemet

$$y' = 5 - 2y, \quad y(0) = 2$$

Her er $b = 5$ og $a = 2$. Den fuldstændige løsning er derfor $f(x) = \frac{5}{2} + ce^{-2x}$. Vi indsætter begyndelsesbetingelsen

$$2 = f(0) = \frac{5}{2} + ce^0 = \frac{5}{2} + c$$

Vi isolerer c og ser, at

$$c = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$$

Den eftersøgte løsning er derfor

$$f(x) = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$$

DL.11 Separable differentialligninger

I dette afsnit vil vi se på en særlig type differentialligninger, som ofte kan løses ved at finde stamfunktioner. Denne type differentialligning kaldes for *separable* differentialligninger fordi den afhængige og uafhængige variabel kan behandles separat, altså hver for sig. I dette afsnit vil vi primært bruge Leibniz-notation $\frac{dy}{dx}$ for y' fordi denne notation gør det nemmest at huske, hvordan separable differentialligninger kan løses.

Definition DL.11.1. En separabel differentialligning er en differentialligning, der kan skrives på formen

$$\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$$

Altså skal venstresiden være differentialkvotienten af y og højresiden skal kunne faktorerises i to faktorer, der hver især kun indeholder enten x eller y .

Eksempel DL.11.2. Differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 3x \cdot \frac{1}{y}$$

er separabel. Den er allerede skrevet på formen som i definitionen med $h(x) = 3x$ og $g(y) = \frac{1}{y}$.

Differentiallingen

$$2x^2 \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy^2}$$

er også separabel. Den kan nemlig omskrives således

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x^2} \cdot \frac{1}{xy^2} = \frac{1}{2x^3} \cdot \frac{1}{y^2}$$

Dvs. at $h(x) = \frac{1}{2x^3}$ og $g(y) = \frac{1}{y^2}$.

Opgave DL.11.3. Omskriv følgende differentialligninger, og gør rede for at de alle er separable. Find udtryk for $h(x)$ og $g(y)$ i alle eksemplerne.

a) $\frac{dy}{dx} = (2x + 2) \cdot (y^2 + 1)$

f) $\ln(x) \cdot \sqrt{xy} \cdot \frac{dy}{dx} = xy - 2xy^2$

b) $\frac{dy}{dx} = y\sqrt{x}$

g) $\frac{dy}{dx} = \frac{y-3y^2}{12x^2+2}$

c) $\frac{dy}{dx} = 12x^2 + 4x + 3$

h) $\frac{dy}{dx} = xy - x + y - 1$

d) $x \cdot \frac{dy}{dx} = y \cdot x^2$

i) $\frac{dx}{dt} = 12t^2 \cdot x$

e) $\frac{dy}{dx} = y(2 - y)$

j) $S \cdot \frac{dS}{dt} = \sqrt{t^2 - 4}$

For en separabel differentialligning kan man komme tættere på en løsning ved at bestemme stamfunktioner til $h(x)$ og til funktionen $k(y) = \frac{1}{g(y)}$. Dette er beskrevet i følgende sætning.

Sætning DL.11.4 (Løsning af separable differentialligninger). Hvis en differentialligning med begyndelsesværdibetingelse $y(x_0) = y_0$ kan skrives på formen

$$\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$$

hvor $h(x)$ er kontinuert i et interval I , der indeholder x_0 , og $g(y)$ er kontinuert og forskellig fra 0 i et interval J , der indeholder y_0 , så kan differentialligningen løsninger beskrives som følger:

Lad $H(x)$ være en stamfunktion til $h(x)$ i intervallet I og lad $K(y)$ være en stamfunktion til $k(y) = \frac{1}{g(y)}$ i intervallet J . Hvis $f(x)$ er en løsning til begyndelsesværdiproblemet, dvs. $f(x)$ opfylder differentialligningen og $f(x_0) = y_0$, så findes en konstant $c \in \mathbb{R}$, så $y = f(x)$ også er løsning til ligningen

$$K(y) = H(x) + c$$

Bemærkning DL.11.5. Konklusionen i sætningen kan også skrives

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx$$

Bevis. Vi antager at $y = f(x)$ er løsning til $\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$, dvs.

$$f'(x) = h(x) \cdot g(f(x))$$

Vælg nu stamfunktioner $H(x)$ til $h(x)$ og $K(y)$ til $k(y) = \frac{1}{g(y)}$, som i sætningen. Vi definerer nu hjælpefunktionen $p(x) = K(f(x))$ og undersøger dens differentialkvotient. Vha. kædereglen fås

$$p'(x) = K'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{g(f(x))} \cdot f'(x)$$

Bruger vi nu udtrykket for $f'(x)$ så får vi

$$p'(x) = \frac{1}{g(f(x))} \cdot h(x) \cdot g(f(x)) = h(x)$$

Det følger altså, at $p(x)$ er stamfunktion til $h(x)$. Dermed findes en konstant $c \in \mathbb{R}$ således at $p(x) = H(x) + c$. Men heraf fås jo at

$$K(f(x)) = H(x) + c$$

og altså er $y = f(x)$ løsning til ligningen

$$K(y) = H(x) + c \quad \square$$

Bemærkning DL.11.6. Det er antaget i sætningen at $h(x)$ er kontinuert, for så ved vi, at der findes en stamfunktion. Det er antaget at $g(y)$ er forskellig fra 0 og kontinuert, for så kan vi definere $k(y) = \frac{1}{g(y)}$ uden at komme i problemer med division med 0, og det sikrer også, at $k(y)$ er kontinuert, så vi kan finde en stamfunktion.

I praksis bruger man ikke sætningen direkte, men i stedet laver man en omskrivning ligesom i integration ved substitution. Dette er forklaret i eksemplerne nedenfor.

Eksempel DL.11.7. Vi vil løse den separable differentialligning

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{y}$$

med begyndelsesværdibetingelse $y(1) = 3$.

Vi laver følgende omskrivning, som ikke er god matematisk skik, men som dog fungerer godt i praksis: Vi ganger med y på begge sider, og vi ganger også med dx , selvom man i virkeligheden ikke kan adskille tæller og nævner i $\frac{dy}{dx}$. Vi får

$$y dy = x dx$$

Nu er det fristende at sætte integraltegn på begge sider, så det gør vi

$$\int y dy = \int x dx$$

Vi finder stamfunktioner

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + k$$

hvor $k \in \mathbb{R}$. Vi behøver kun en ubekendt konstant på den ene side af lighedstegnet, da konstanter fra de to integraler kan samles i en.

Vi vil isolere y , da vi leder efter løsninger $y = f(x)$, og vi finder

$$y^2 = x^2 + 2k$$

og

$$y = \pm \sqrt{x^2 + 2k}$$

Da vi har begyndelsesbetingelsen $y(1) = 3$, så ved vi, at vi skal bruge den positive løsning, og vi ser, at

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2k}$$

er vores første bud på en løsning. Indsætter vi det kendte punkt $(1, 3)$, så kan vi isolere k

$$f(1) = 3 \Leftrightarrow \sqrt{1^2 + 2k} = 3 \Leftrightarrow 1 + 2k = 9 \Leftrightarrow 2k = 8 \Leftrightarrow k = 4$$

Løsningen til begyndelsesværdiproblemet er altså

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 8}$$

Bemærkning DL.11.8. Hvis vi sammenligner eksemplet med sætningen, så ser vi at $h(x) = x$ og $g(y) = \frac{1}{y}$. Dermed er $k(y) = \frac{1}{y} = y$. Ifølge sætningen skal vi altså finde stamfunktion til $k(y) = y$ og til $h(x) = x$, og sætte dem lig hinanden på nær en konstant – men det var jo faktisk præcist det, vi endte med at gøre i eksemplet. Omskrivningen, hvor $\frac{dy}{dx}$ opfattes som en brøk og der indføres integraltegn, er altså en snedig måde at huske konklusionen fra sætningen.

Eksempel DL.11.9. Vi vil finde alle løsninger til

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{y}$$

Vi omskriver

$$y \, dy = 3x^2 \, dx$$

sætter integraltegn

$$\int y \, dy = \int 3x^2 \, dx$$

og integrerer

$$\frac{1}{2}y^2 = x^3 + k_0$$

Isoleres y , så finder vi (undervejs sætter vi $k = 2k_0$)

$$y^2 = 2x^3 + 2k_0 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{2x^3 + k}$$

Alle løsninger har altså formen $f(x) = \pm \sqrt{2x^3 + k}$. Definitionsmængden findes ved at løse $2x^3 + k \geq 0$, dvs.

$$2x^3 + k \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq -\frac{k}{2} \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{-\frac{k}{2}} = -\sqrt[3]{\frac{k}{2}}$$

I praksis bestemmer vi k og fortegnet ved kvadratrodstegnet ud fra begyndelsesværdibetingelsen. Fortegnet på y -værdien fra begyndelsesværdibetingelsen angiver fortegnet ved kvadratrodstegnet og k bestemmes ved at indsætte punktet.

Lad os finde løsningen med $f(4) = 12$. Vi ser at

$$12 = \pm \sqrt{2 \cdot 4^3 + k}$$

og dermed at fortegnet ved kvadratroden skal være $+$. Vi isolerer k

$$12 = \sqrt{2 \cdot 4^3 + k} \Leftrightarrow 144 = 2 \cdot 4^3 + k = 128 + k \Leftrightarrow k = 144 - 128 = 16$$

Den søgte løsning er dermed

$$f(x) = \sqrt{2x^3 + 16}$$

Løsningen er defineret for $x \geq -\sqrt[3]{\frac{16}{2}} = -2$.

Eksempel DL.11.10. Vi vil undersøge differentialligningen $\frac{dy}{dx} = k \cdot y$. Dette er en separabel differentialligning, så vi følger eksemplet ovenfor og skriver

$$\frac{1}{y} dy = k dx$$

Indsætter vi integraltegn får vi

$$\int \frac{1}{y} dy = \int k dx$$

og da vi kender stamfunktioner kan vi fortsætte omskrivningen

$$\ln(|y|) = kx + c$$

Isolerer vi y får vi

$$|y| = e^{kx+c} \Leftrightarrow y = \pm e^{kx+c} = \pm e^c \cdot e^{kx}$$

Bemærk nu, at når $c \in \mathbb{R}$ er en vilkårlig konstant, så er e^c en positiv konstant. Når vi derfor ser konstanten $\pm e^c$, så kan vi få alle reelle tal på nær 0. Vi kan altså skrive løsningerne som

$$f(x) = c_0 e^{kx}$$

hvor $c_0 \in \mathbb{R}$, men $c_0 \neq 0$.

Vi kan genkende differentialligningen som eksponentiel vækst. Vi genkender også løsningen, på nær, at vi ikke finder den trivielle løsning $f(x) = 0$. Det skyldes, at $h(y) = y$ ikke er forskellig fra 0 på noget interval J , der indeholder 0, så sætningen om separable differentialligninger kan ikke finde denne løsning.

Opgave DL.11.11. I eksemplet har vi givet et nyt bevis for den fuldstændige løsning til differentialligningen, der beskriver eksponentiel vækst. Forklar hvorfor forskudt eksponentiel vækst også er beskrevet ved en separabel differentialligning, og giv dermed et nyt bevis for den sætning.

DL.12 Logistisk vækst

I dette afsnit, vil vi behandle en vigtig type af differentiallyigninger, hvis løsninger kaldes logistisk vækst. Logistisk vækst er en væksttype, som for små y -værdier opfører sig som eksponentiel vækst, men hvor væksten *ikke* er ubegrænset, men tværtimod er begrænset opadtil af en øvre grænse. Den øvre grænse vil vi betegne M , og vi kalder M for *mætningsgraden* eller *bæreevnen*. Nogle kalder også M for *steady state*, men den logistiske differentiallyigning kan, som vi skal se, faktisk have to løsninger, der med rette kunne kaldes *steady state*, da der er tale om et balancepunkt for væksten, så denne benævnelse vil vi ikke bruge.

Sætning DL.12.1 (Logistisk vækst). *Lad $a, M \in \mathbb{R}$ være tal hvor $a, M \neq 0$. Differentiallyigningen*

$$y' = a \cdot y \cdot (M - y)$$

har den fuldstændige løsning

$$f(x) = 0 \text{ eller } f(x) = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-aMx}}$$

Her er $c \in \mathbb{R}$ en vilkårlig konstant.

Inden vi går til beviset, vil vi analysere ligningen. Vi finder nulpunkter for y'

$$y' = 0 \Leftrightarrow a \cdot y \cdot (M - y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee M - y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee y = M$$

Bemærk, at den konstante funktion $f(x) = 0$ er en løsning. Vi gør prøve og udregner først venstresiden

$$y' = f'(x) = 0$$

og derefter højresiden

$$a \cdot y \cdot (M - y) = a \cdot f(x)(M - f(x)) = a \cdot 0(M - 0) = 0$$

Den konstante funktion $f(x) = M$ er også en løsning (denne løsning fås ved at sætte $c = 0$ i løsningsformlen ovenfor) da venstresiden giver $y' = f'(x) = 0$ og $M - f(x) = M - M = 0$, så højresiden giver $a \cdot f(x)(M - f(x)) = 0$.

De to konstante løsninger $f(x) = 0$ og $f(x) = M$ kaldes de *trivielle løsninger*, og udgør hvert sit balancepunkt for løsningerne.

Enhver anden løsning f har ingen punkter, hvor $f(x) = 0$ eller $f(x) = M$ (pga. untydighedssætningen ovenfor **Sætning DL.8.1**) og opfylder dermed også at $f'(x)$ er forskellig fra 0 i alle punkter. Løsningerne har altså ingen ekstremumpunkter, og er monotone i hele deres definitionsområde.

Bevis. Beviset består af to dele.

Eksistensdel Vi skal vise at $f(x) = \frac{M}{1+c \cdot e^{-aMx}}$ er en løsning til $y' = a \cdot y \cdot (M - y)$. Vi indsætter $y = f(x)$ og udregner venstresiden vha. kæderegele

$$y' = f'(x) = \frac{-M}{(M + c \cdot e^{-aMx})^2} \cdot c \cdot (-aM) \cdot e^{-aMx} = \frac{a \cdot c \cdot M^2 \cdot e^{-aMx}}{(M + c \cdot e^{-aMx})^2}$$

og derefter højresiden

$$\begin{aligned} a \cdot y \cdot (M - y) &= a \cdot \frac{M}{1 + c \cdot e^{-aMx}} \cdot \left(M - \frac{M}{1 + c \cdot e^{-aMx}} \right) \\ &= \frac{aM^2}{1 + c \cdot e^{-aMx}} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + c \cdot e^{-aMx}} \right) \\ &= \frac{aM^2}{1 + c \cdot e^{-aMx}} \cdot \left(\frac{1 + c \cdot e^{-aMx}}{1 + c \cdot e^{-aMx}} - \frac{1}{1 + c \cdot e^{-aMx}} \right) \\ &= \frac{aM^2}{1 + c \cdot e^{-aMx}} \cdot \frac{1 + c \cdot e^{-aMx} - 1}{1 + c \cdot e^{-aMx}} \\ &= \frac{aM^2}{1 + c \cdot e^{-aMx}} \cdot \frac{c \cdot e^{-aMx}}{1 + c \cdot e^{-aMx}} \\ &= \frac{a \cdot c \cdot M^2 \cdot e^{-aMx}}{(1 + c \cdot e^{-aMx})^2} \end{aligned}$$

Da venstresiden og højresiden er ens, så er $f(x)$ en løsning til ligningen.

Entydighedsdel I denne del af beviset antager vi, at g er en løsning til $y' = a \cdot y \cdot (M - y)$. Hvis $g(x) = 0$ i alle punkter, så er g den trivielle løsning og vi er færdige. Hvis $g(x)$ ikke er konstant lig 0, så er $g(x)$ forskellig fra 0 i alle punkter (pga. **Sætning DL.8.1**). Vi skal nu vise, at der findes et $c \in \mathbb{R}$, så $g(x) = \frac{M}{1+c \cdot e^{-aMx}}$. At g er løsning til ligningen betyder, at $g'(x) = a \cdot g(x)(M - g(x))$. Vi definerer en snedig hjælpefunktion

$$h(x) = \frac{M}{g(x)} - 1$$

Bemærk at h er veldefineret, da $g(x)$ er forskellig fra 0 i alle punkter.

Vi differentierer vha. kæderegele og benytter at g løser differentialligningen

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{-M}{g(x)^2} \cdot g'(x) = \frac{-M}{g(x)^2} \cdot a \cdot g(x)(M - g(x)) = \frac{-aM}{g(x)}(M - g(x)) \\ &= \frac{-aM^2}{g(x)} + aM = -aM \cdot \left(\frac{M}{g(x)} - 1 \right) = -aM \cdot h(x) \end{aligned}$$

Dvs. at $y = h(x)$ er en løsning til differentialligningen $y' = -aMy$, altså differentialligningen, der beskriver eksponentiel vækst. Det følger nu af **Sætning DL.9.1** med $k = -aM$, at der findes et tal c så

$$h(x) = c \cdot e^{-aMx}$$

Vi kan nu isolere $g(x)$ for nu er jo følgende udsagn jo ensbetydende (husk hvordan h var defineret)

$$\frac{M}{g(x)} - 1 = c \cdot e^{-aMx}$$

$$\frac{M}{g(x)} = 1 + c \cdot e^{-aMx}$$

$$M = (1 + c \cdot e^{-aMx}) \cdot g(x)$$

$$g(x) = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-aMx}}$$

Vi ser, at g har den ønskede form og beviset er afsluttet. $\square$

Sætningen om logistisk vækst formuleres nogle gange på en anden måde, hvor man ikke direkte kan se den naturligt øvre grænse for væksten.

Sætning DL.12.2. Lad $a, b \in \mathbb{R}$ være tal hvor $a, b \neq 0$. Differentialligningen

$$y' = y \cdot (b - a \cdot y)$$

har den fuldstændige løsning

$$f(x) = 0 \text{ eller } f(x) = \frac{\frac{b}{a}}{1 + c \cdot e^{-bx}}$$

Her er $c \in \mathbb{R}$ en vilkårlig konstant.

Bevis. Sætningen følger umiddelbart af ovenstående **Sætning DL.12.1** for differentialligningen

$$y' = y \cdot (b - a \cdot y)$$

kan omskrives til (vi sætter a uden for parentesen, ved at dividere med a i hvert led inde i parentesen)

$$y' = a \cdot y \cdot \left(\frac{b}{a} - y \right)$$

Dette er differentialligningen for logistisk vækst, som vi allerede har behandlet, blot med $M = \frac{b}{a}$. Dermed er også $aM = b$, og vi ser at løsningsformlen er præcis som påstået i sætningen. $\square$

Bemærkning DL.12.3. Hvis differentialligningen er skrevet på formen

$$y' = y \cdot (b - a \cdot y)$$

så er mætningsgraden $M = \frac{b}{a}$, hvilket omskrivningen i beviset viser.

Vi vil nu undersøge nogle egenskaber ved løsningerne til den logistiske differentialligning.

Sætning DL.12.4. Lad f være en ikke-triviel løsning til den logistiske differentialligning $y' = a \cdot y \cdot (M - y)$. Da gælder, at de to linjer med ligninger $y = 0$ og $y = M$ er vandrette asymptoter til grafen for f .

Bevis. Vi vil kun vise tilfældet, hvor a og M har samme fortegn (typisk begge positive). Tilfældet med forskellige fortegn overlades til læseren. Her gælder, at når $x \rightarrow \infty$, så vil $c \cdot e^{-aMx} \rightarrow 0$. Herfra ses, at når $x \rightarrow \infty$, så vil

$$f(x) \rightarrow \frac{M}{1+0} = M$$

Når $x \rightarrow -\infty$, så gælder at e^{-aMx} vokser over alle grænser. Brøken $f(x) = \frac{M}{1+ce^{-aMx}}$ går derfor mod 0. Dette viser det ønskede. $\square$

Opgave DL.12.5. Vis sætningen i det tilfælde, hvor a og M har forskellige fortegn.

Bemærkning DL.12.6. For en løsning, hvis y -værdier ikke ligger i intervallet $[0, M]$, så er grafen delt i to dele. En med y -værdier i intervallet $]M, \infty[$ og en med y -værdier i intervallet $] -\infty, 0[$. Det er så den første del, der har $y = M$ som vandret asymptote, og den anden del, der har $y = 0$ som vandret asymptote.

Tallet M kaldes for bæreevnen eller mætningsgraden for funktionen f . Når konstanten $c > 0$ og a og M er positive, så gælder, at funktionen f vokser op mod mætningsgraden når $x \rightarrow \infty$. For sådan en løsning kan vi undersøge, hvor funktionen vokser hurtigst.

Sætning DL.12.7. Lad $a, M > 0$ og lad f være en løsning til den logistiske differentialligning $y' = a \cdot y \cdot (M - y)$. Skriv $f(x)$ på formen

$$f(x) = \frac{M}{1 + ce^{-aMx}}$$

Hvis $c > 0$, så opnås den største væksthastighed for funktionen f i det punkt, hvor $f(x) = \frac{M}{2}$.

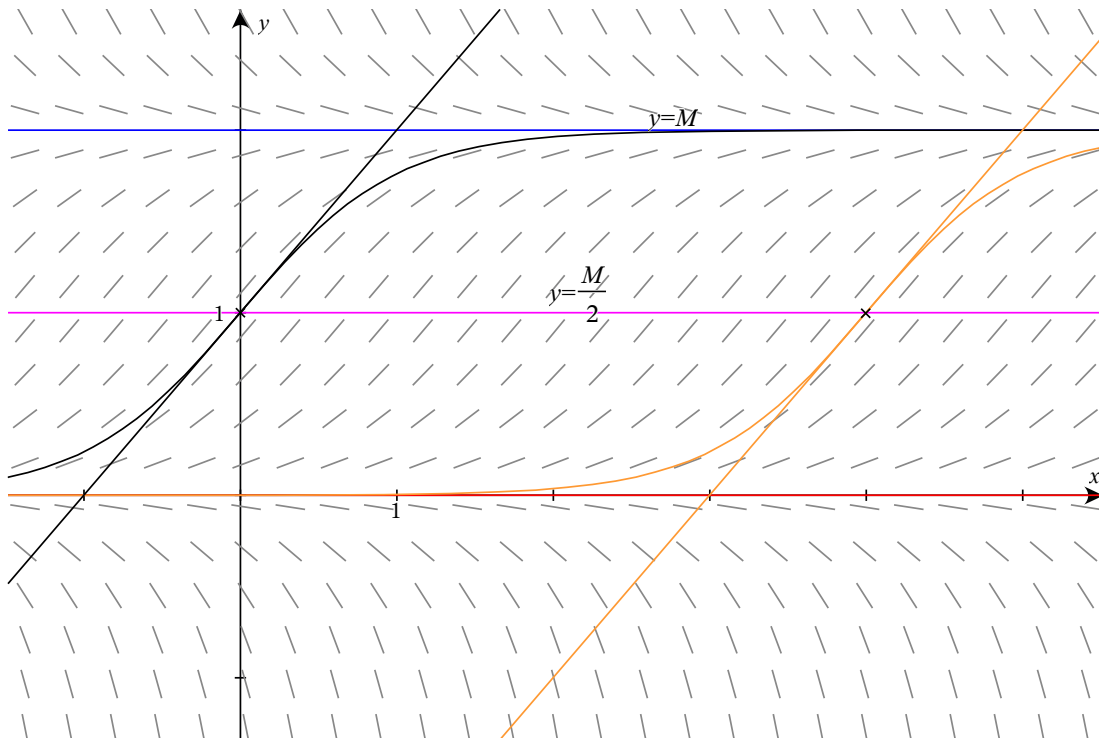
Bevis. Betingelsen om at $c > 0$ sikrer at $0 < f(x) < M$. Vi skal undersøge, hvornår $f'(x) = y'$ er maksimal. Bemærk, at $y' = -ay^2 + aMy$, som er et andengradspolynomium i y . Andengradspolynomiet har de to rødder $y = 0$ og $y = M$ og koefficienten til leddet y^2 er negativ. Maksimum for andengradspolynomiet opnås derfor når $f(x) = y = \frac{M}{2}$ som ligger midt mellem de to rødder. Bemærk også, at da $0 < f(x) < M$, så er væksthastigheden for f altid positiv. $\square$

Opgave DL.12.8. Hvor stor er den maksimale væksthastighed for en løsning som i sætningen?

Opgave DL.12.9. a) Hvorfor er det antaget i sætningen, at $M > 0$?

b) Formulér og bevis en sætning for tilfældet, hvor $a < 0$.

På Figur DL.7 ses to løsningskurver hørende til den logistiske differentialligning $y' = y \cdot (2 - y)$. Her er $M = 2$, så $\frac{M}{2} = 1$. De to løsninger har maksimal væksthastighed når $y = 1$, dvs. at løsningskurverne er stejlest netop der, hvor de skærer linjen med ligning $y = 1$. På figuren er tangenterne til løsningskurverne indtegnet i



Figur DL.7: To løsningskurver hørende til den logistiske differentialligning $y' = y \cdot (2 - y)$.

netop disse skæringspunkter. Det ses af figuren, at grafen er stejlest i disse punkter, og at tangenterne er *vendetangenter*, dvs. at grafen skifter konvexitetsforhold, fra at krumme opad til at krumme nedad. Det ser også ud som om x -aksen og linjen med ligning $y = 2$ er vandrette asymptoter til de to grafer.

DL.12.1 Alternativt bevis for sætningen om logistisk vækst (vha. separation af variable)

Vi afslutter dette afsnit med et alternativt bevis for sætningen om logistisk vækst, denne gang vha. separation af variable.

*Alternativt bevis for Sætning **DL.12.1** vha. separation (gennemgås ikke).* Vi kan også give et andet bevis, ved at bemærke at differentialligningen hørende til logistisk vækst er separabel. Vi laver kun beviset i det tilfælde hvor $0 < y < M$. Bemærk at både y og $M - y$ er positive ($M - y > M - M = 0$). Lad os omskrive, som når vi løser separable differentialligninger

$$\frac{1}{y \cdot (M - y)} dy = a dx$$

og dermed

$$\int \frac{1}{y \cdot (M - y)} dy = \int a dx$$

Det viser sig at være smart, at gange ligningen igennem med M , så det gør vi og får

$$\int \frac{M}{y \cdot (M-y)} dy = \int aM dx = aMx + c_0$$

For at finde stamfunktion til $k(y) = \frac{M}{y \cdot (M-y)}$ bemærker vi at

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{M-y} = \frac{A(M-y)}{y \cdot (M-y)} + \frac{By}{y(M-y)} = \frac{A(M-y) + By}{y \cdot (M-y)} = \frac{AM + (B-A) \cdot y}{y \cdot (M-y)}$$

Hvis vi derfor på snedig vis vælger A og B så $A = 1$ og $B - A = 0$, altså så $A = 1$ og $B = 1$, så er

$$\frac{M}{y \cdot (M-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{M-y}$$

Vi kan altså bestemme

$$\int \frac{M}{y \cdot (M-y)} dy = \int \frac{1}{y} dy + \int \frac{1}{M-y} dy$$

Det første integral kan uden videre bestemmes (da $y > 0$)

$$\int \frac{1}{y} dy = \ln(y) + k_1$$

I det andet integral bruges substitution $s = M - y$, så er $\frac{ds}{dy} = -1$ og altså er $dy = -ds$, vi ser at (da $M - y > 0$)

$$\int \frac{1}{M-y} dy = \int \frac{1}{s} (-1) ds = - \int \frac{1}{s} ds = -\ln(|s|) + k_2 = -\ln(M-y) + k_2$$

Alt i alt er

$$\begin{aligned} aMx + c_0 &= \int \frac{1}{y \cdot (M-y)} dy = \ln(y) + k_1 - \ln(M-y) + k_2 \\ &= \ln\left(\frac{y}{M-y}\right) + k \end{aligned}$$

hvor $k = k_1 + k_2$. Anvender vi nu eksponentialfunktionen på begge sider, så får vi

$$e^{aMx+c_0} = e^{\ln\left(\frac{y}{M-y}\right)+k} = e^{\ln\left(\frac{y}{M-y}\right)} e^k = \frac{y}{M-y} \cdot e^k$$

Dermed er

$$\begin{aligned} e^{aMx+c_0} &= \frac{y}{M-y} \cdot e^k \Leftrightarrow (M-y)e^{aMx+c_0} = ye^k \Leftrightarrow \\ Me^{aMx+c_0} - ye^{aMx+c_0} &= ye^k \Leftrightarrow Me^{aMx+c_0} = ye^k + ye^{aMx+c_0} \Leftrightarrow \\ Me^{aMx+c_0} &= y(e^k + e^{aMx+c_0}) \end{aligned}$$

Det følger at

$$y = \frac{Me^{aMx+c_0}}{e^k + e^{aMx+c_0}}$$

Forlænges brøken med e^{-aMx-c_0} fås

$$y = \frac{M}{e^{-aMx-c_0}e^k + 1} = \frac{M}{1 + e^{k-c_0}e^{-aMx}}$$

Vi genkender udtrykket fra sætningen, hvis vi sætter $c = e^{k-c_0}$. □

DL.13 Temarapport

Som afslutning på forløbet om differentialligninger skal I udarbejde en temarapport. Temarapporten skal handle om følgende sætning, der omhandler den lineære første ordens differentialligning med variable koefficienter.

Sætning DL.13.1. *Lad $a(x)$ og $b(x)$ være kontinuerte funktioner. Lad $A(x)$ være en stamfunktion til $a(x)$. Differentialligningen*

$$y' = b(x) - a(x) \cdot y$$

har den fuldstændige løsning

$$f(x) = \int b(x)e^{A(x)} dx e^{-A(x)}$$

Bemærkning. Husk at symbolet $\int b(x)e^{A(x)} dx$ er en samlet betegnelse for *alle* stamfunktioner for funktionen med forskrift $g(x) = b(x)e^{A(x)}$. Da der er uendeligt mange stamfunktioner til g (man kan finde én og lægge en vilkårlig konstant til, så har man en ny), så er der uendeligt mange løsninger i udtrykket for f . For at man ikke glemmer, at der er uendeligt mange løsninger skrives løsningsformlen undertiden (f.eks. i den officielle formelsamling) som

$$f(x) = \int b(x)e^{A(x)} dx e^{-A(x)} + ce^{-A(x)}$$

Her er det så underforstået, at man ved udregning af integralet blot vælger én stamfunktion til $i(x) = b(x)e^{A(x)}$.

Differentialligningen skrives af og til, f.eks. i den officielle formelsamling, om på formen

$$y' + a(x) \cdot y = b(x)$$

Løsningsformlen er den samme som i sætningen.

Opgave DL.13.2. a) Gennemfør et bevis for sætningen. I entydighedsdelen er det en god idé at indføre funktionen

$$h(x) = g(x)e^{A(x)}$$

hvor g er en løsning til differentialligningen.

b) Løs differentialligningen $t \cdot \frac{dy}{dt} + y - \cos(t) = 0, t > 0$ vha. sætningen.

c) Find mindst en eksamensopgave, der kan løses vha. sætningen, men som ikke kan løses vha. af de tidligere sætninger, vi har set. Eksamensopgaven skal være et eksempel på en konkret anvendelse af differentialligninger. Løs eksamensopgaven både uden Nspire (skrives i hånden) og med Nspire (brug [deSolve](#)).

- d) Skriv 5–10 linjer om modellering vha. differentialligninger med udgangspunkt i den løste eksamensopgave.
- e) (Frivilligt) Benyt sætningen til at give et nyt bevis for sætningen om forskudt eksponentiel vækst.