

BASAL VIDENSKABSTEORI, METODER OG BEGREBER I MATEMATIK

OM MATEMATIK

Matematikkens genstande er særlige, fordi de ikke har fysisk form. Vi kan altså hverken se, høre eller mærke dem. Vi kan heller ikke måle på dem med et måleapparat. Matematikkens genstande er abstrakte objekter, som kun eksisterer i vores tanker, når vi skal undersøge dem.

Vi kan undersøge egenskaber ved en konkret funktion f.eks. $f(x) = x^2 + 3x - 4$. Her er selve funktionen et eksempel på en matematisk *genstand*.

Man kan arbejde i matematik i matematikkens verden. Det kaldes også en formel tilgang.

Eller man kan (ofte i samarbejde med andre fag) arbejde med matematisk modellering af den virkelige verden. Her vil man bevæge sig mellem den virkelige verden (empirisk tilgang) og den matematiske verden (formel tilgang).

VIGTIGE BEGREBER I MATEMATIKKENS VERDEN

Nedenfor er beskrevet nogle vigtige kendetegn og begreber, der kan bruges til at beskrive arbejdet i matematikkens verden.

Teori, beviser og ræsonnement

En matematisk teori er den samlede viden, vi har opnået om bestemte matematiske genstande. En matematisk teori består typisk af det, der kaldes *sætninger*. Da enhver matematisk undersøgelse ikke kan starte helt fra bunden, er en fremstilling af relevant eksisterende matematisk teori vigtig.

Ofte taler man i matematik om den *aksiomatisk-deduktive* metode som den helt centrale metode i faget. Det er f.eks. den, der beskriver ideen i de fleste beviser, hvor man udleder sætninger ud fra kendt teori. I udgangspunktet fra det man kalder *aksiomer*, som er simple sætninger, der antages indlysende. Det er dog yderst sjældent, at vi i den daglige matematikundervisning udleder sætninger fra aksiomer.

Det matematiske *ræsonnement* er, når man ud fra kendt matematisk teori slutter, at fordi der gælder én bestemt ting (grundlaget), så må der nødvendigvis også gælde en anden bestemt ting (resultatet).

Beviset er en særlig type af ræsonnement, som anvendes til at godtgøre, at matematisk teori er korrekt. Det er typisk *sætninger*, som der føres bevis for.

Det er vigtigt, når man formulerer et bevis, at man redegør præcist for det, der går forud for sætningen, kaldet *forudsætninger*. Her kan man skelne mellem *definitioner*, *tidligere viste sætninger* og *antagelser i sætningen*.

Notation

I matematik er det matematiske symbolsprog et centralt redskab, når man skal formulere sig om matematiske genstande. Det er vigtigt, at den symbolske notation, man anvender, er konsekvent.

Begrebsafklaring

Fordi matematikkens genstande er abstrakte, er det helt centralt at være meget præcis i afgrænsningen af, hvad der menes med et konkret begreb. Vi kalder ofte sådanne afklaringer for *definitioner*.

Problemløsning

I matematik løser vi ofte konkrete matematiske problemer. I sådanne processer kan det være godt at skelne aktivt mellem tre typer af matematisk problemløsning:

Analytisk løsning:

Når et problem løses ved udledninger, omskrivninger og andre former for manipulation med matematiske symboler. Det kan for eksempel være at løse en differentialligning ved hjælp af en sætning.

Numerisk løsning:

Når et problem løses ved systematiske beregninger, som gradvist indkredser svaret med stadigt større præcision. Eller når man løser differentialligninger med numeriske metoder, fordi det ikke er muligt at løse dem analytisk.

Grafisk løsning:

Når et problem løses ved brug af grafiske repræsentationer, f.eks. grafer for funktioner, geometriske tegninger og statistiske diagrammer. Det kan for eksempel være at løse ligninger grafisk, fordi en analytisk løsning eller numerisk løsning ikke kan lade sig gøre.

Eksempel

At udarbejde et eksempel til illustration af et symbol, et begreb, en sætning eller et andet stykke matematik kan bruges til at vise forståelse af matematisk teori.

Eksperiment

Et eksperiment kan for eksempel bruges til undersøgelse af, hvad en bestemt parameter (eller variabel) betyder i en konkret situation ved at fastholde alle andre parametre eller variable konstante og variere den afprøvede parameter eller variabel på en systematisk måde.

Man kan for eksempel variere konstanterne i en SIR-model for at undersøge deres betydning. Hvis det er muligt, kan resultaterne af et eksperiment eftervises med et ræsonnement eller bevis.

METODER I MATEMATIKKENS VERDEN

En metode er det, man har gjort for at svare på et konkret *fagligt* spørgsmål. En metode er altså ikke en generel abstrakt ting, men noget der er konkret og afhænger af, hvad man faktisk har foretaget sig.

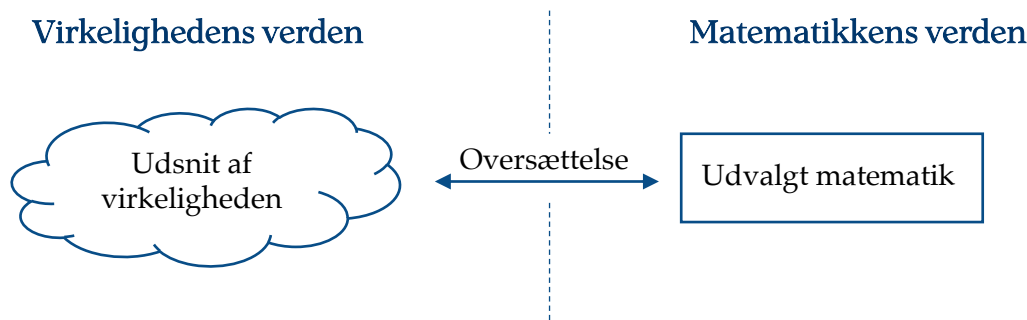
Når man til den mundtlige prøve i SRP skal præsentere sin metode og metodiske overvejelser, skal det altså handle om, hvad man har gjort i sin besvarelse af konkrete spørgsmål i SRP'en.

Eksempler på konkrete metoder

Metode	Eksempel på, hvordan metoden bruges
Geometriske beregninger	Vi bestemmer sidelængder i, vinkler i og arealer af geometriske figurer.
Analyse af talmateriale vha. deskriptiv statistik	Vi beregner middeltal/gennemsnit, varians og spredning for et talmateriale. Vi bestemmer kvartilsæt for et talmateriale. Vi konstruerer boksplot på baggrund af et kvartilsæt. Vi beskriver et (eller sammenligner to) talmateriale(r) på baggrund af de fundne statistiske deskriptorer.
Analyse af talmateriale vha. regression	Vi undersøger om en given matematisk model kan bruges til at beskrive et talmateriale. Vi fortolker de fundne konstanter, fx a og b i en lineær model.
Analyse af talmateriale vha. statistiske test	Vi undersøger om en stikprøve kan antages at være fra en given binomialfordeling. Vi bestemmer konfidensinterval for hældningskoefficient.
Bestemmelse af væksthastighed vha. differentialregning	Vi bestemmer og fortolker væksthastigheden ($f'(x_0)$) i et givet punkt. Vi undersøger funktioners monotoniforhold vha. differentialregning.
Optimering	Vi optimerer (maksimerer eller minimerer) en given funktion (funktionen kan beskrive rumfang, areal, omkostninger, overskud mm.).
Udregning af integraler	Vi bestemmer arealet af en geometrisk figur vha. et (eller flere) integral(er). Vi bestemmer rumfanget af et omdrejningslegeme vha. integralregning.
Modellering vha. differentialligninger	Vi opstiller en differentiaalligningsmodel på baggrund af antagelser om en bestemt udvikling. Vi løser en opstillet differentiaalligning. Vi anvender en løsning til en differentiaalligning til at beskrive og vurdere en konkret udvikling. Vi finder en numerisk løsning til en differentiaalligning.

MATEMATISK MODELLERING

Når matematik anvendes til at beskrive forhold uden for matematikken, sker det oftest ved at bruge en matematisk model, som er en sammenkobling mellem et udsnit af virkeligheden (empiri) og noget udvalgt matematik (når man kombinerer et andet fag med matematik, vil det fag som regel repræsentere virkelighedens verden). Sammenkoblingen sker ved, at objekter og relationer oversættes fra virkelighedens verden til matematikkens verden. Så snart man har oversat et problem til matematikkens verden, så kan man anvende alle værktøjerne fra matematikkens verden, som er beskrevet ovenfor.



Modellering

Når man opstiller en matematisk model, kaldes processen for modellering. En modelleringsproces vil typisk gennemløbe fire delprocesser, som man kan inddrage i diskussionen af modelleringen, uanset om man selv har lavet modellen eller anvender en model, som andre har lavet:

Matematisering, hvor undersøgelsesområdet (inkl. spørgsmålet) oversættes til matematikkens verden. For at dette kan lade sig gøre, kan det være nødvendigt at afgrænse sit undersøgelsesområde og lave en række antagelser. Som eksempel kan nævnes opstilling af en differentialligningsmodel på baggrund af antagelser om en bestemt udvikling.

Matematisk analyse, hvor det matematiske problem løses. F.eks. løsning af en opstillet differentialligning.

Fortolkning, hvor den matematiske løsning fortolkes eller oversættes til en løsning i virkelighedens verden. F.eks. fortolkning af løsningen til en differentialligning.

Vurdering (også kaldet validering), hvor man sammenholder løsningen med det oprindelige spørgsmål og vurderer, hvor god den opstillede model er til at løse det oprindelige problem/spørgsmål.

