

Sætning 9

En binomialfordelt stokastisk variabel X med antalsparameter n og sandsynlighedsparameter p har middelværdien

$$\mu = E(X) = np,$$

variansen

$$\text{Var}(X) = np(1 - p)$$

og spredningen

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}.$$

Bevis

Vi viser kun formelen for middelværdi og nøjes med at se på tilfældet $n = 3$. Argumentet kan uden videre generaliseres til vilkårlige n . Til beviset får vi brug for de tre formler

$$\begin{cases} 1 \cdot K(3,1) = 3 \cdot K(2,0) \\ 2 \cdot K(3,2) = 3 \cdot K(2,1) \\ 3 \cdot K(3,3) = 3 \cdot K(2,2), \end{cases} \quad (1)$$

som kan sammenfattes til formelen

$$r \cdot K(3, r) = 3 \cdot K(2, r - 1), \quad r = 1, 2, 3.$$

At denne formel er korrekt kan vi indse ved at omskrive udtrykket på højre side af lighedstegnet:

$$\begin{aligned} 3 \cdot K(2, r - 1) &= 3 \cdot \frac{2!}{(r-1)!(2-(r-1))!} = \frac{3!}{(r-1)!(2-r+1)!} = \frac{3!}{(r-1)!(3-r)!} \\ &= r \cdot \frac{3!}{r \cdot (r-1)!(3-r)!} = r \cdot \frac{3!}{r!(3-r)!} = r \cdot K(3, r). \end{aligned}$$

Sætningen kan nu bevises på følgende måde:

Når X er binomialfordelt med antalsparameter $n = 3$ og sandsynlighedsparameter p er

$$\begin{cases} P(X = 1) = K(3,1) \cdot p^1 \cdot q^2 \\ P(X = 2) = K(3,2) \cdot p^2 \cdot q^1 \\ P(X = 3) = K(3,3) \cdot p^3, \end{cases}$$

hvor vi har sat $q = 1 - p$.

Ifølge definitionen på middelværdi gælder derfor

$$\begin{aligned} \mu &= 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) \\ &= 0 + 1 \cdot K(3,1) \cdot p^1 \cdot q^2 + 2 \cdot K(3,2) \cdot p^2 \cdot q^1 + 3 \cdot K(3,3) \cdot p^3. \end{aligned}$$

Vi omskriver med de tre formler i (1) og sætter derefter faktoren $3p$ uden for parentes:

$$\begin{aligned} \mu &= 3 \cdot K(2,0) \cdot p^1 \cdot q^2 + 3 \cdot K(2,1) \cdot p^2 \cdot q^1 + 3 \cdot K(2,2) \cdot p^3 \\ &= 3p \left(K(2,0) \cdot q^2 + K(2,1) \cdot p^1 \cdot q^1 + K(2,2) \cdot p^2 \right). \end{aligned}$$

Udtrykket i parentesen er summen af binomialsandsynlighederne i binomialfordelingen $b(2,p)$, og parentesen har derfor værdien 1. Altså gælder

$$\mu = 3p \cdot 1 = 3p,$$

som netop er formelen $\mu = n \cdot p$, når $n = 3$.