Sætning

Antag $X \sim N(\mu, \sigma)$. Så er

$$E(X) = \mu.$$

Bevis

Da $X \sim N(\mu, \sigma)$, så er tæthedsfunktionen givet ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Da X er en kontinuert stokastisk variabel, så kan middelværdien beregnes ved formlen

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx.$$

Indsættes forskriften for $f(x)$ i formlen, får vi

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\, dx. \end{aligned}$$

For at kunne beregne dette integral laver vi en substitution med

$$t = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \cdot x - \frac{\mu}{\sigma}.$$

Vi bemærker, at vi kan isolere x i udtrykket $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$ på følgende måde:

$$t = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$\sigma t = x - \mu$$

$$\sigma t + \mu = x$$

Vi differentierer nu $t = \frac{1}{\sigma} \cdot x - \frac{\mu}{\sigma}$. mht. x og ''isolerer'' herefter dx:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sigma}$$

$$dt = \frac{1}{\sigma} dx$$

$$\sigma dt = dx.$$

Vi kan nu substituere de fundne udtryk ind i integralet:

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + \mu) \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t^2} \sigma dt$$

OBS: Vi behøver ikke ændre integralets grænser, da $t \to \pm\infty$ for $x \to \pm\infty$.

$$= \frac{1 \cdot \sigma}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + \mu) \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t^2} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t^2} + \mu \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t^2}) dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \sigma t \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t^2} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mu \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t^2} dt$$

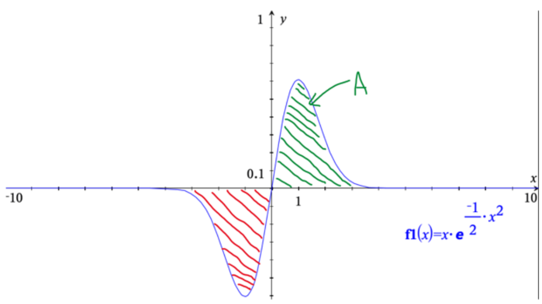
$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t^2} dt + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot t^2} dt$$

Vi bemærker nu, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \int_{-\infty}^{0} te^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \int_{0}^{\infty} te^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Integranden $te^{-\frac{1}{2}t^2}$ er en ulige funktion (dvs. $f(-t) = -f(t)$ for alle t i definitionsmængden), og derfor er arealet A af det grønne område (området mellem grafen og x-aksen i intervallet fra 0 til ∞) lige så stort som arealet af det røde område (området mellem grafen og x-aksen i intervallet fra −∞ til 0). Dermed fås

$$\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{1}{2}t^2} dt = -A + A = 0.$$



Vi indsætter nu dette i udtrykket for $E(X)$, som vi fandt før:

$$E(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t^2} \, dt + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot t^2} \, dt$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot 0 + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \, dt$$

$$= \mu \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} \, dt$$

Vi bemærker, at integranden $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}$ er tæthedsfunktionen for standardnormalfordelingen, og derfor er $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} \, dt = 1$. Vi får dermed, at

$$E(X) = \mu \cdot 1 = \mu.$$

Dette afslutter beviset.