Niveau 4 – Normalfordelingen

Fordelingsfunktioner – Uden hjælpemidler (med formelsamlingen)

**Opgave 1:**

Den stokastiske variabel $X$ er normalfordelt med middelværdi 20 og spredning 5, $X∼N(20,5)$. Bestem:

1. $F(20)$.

Det aflæses at µ=20 og $σ=5$. Vi ved at

$$F\left(20\right)=P\left(X\leq 20\right)=P\left(X\leq µ\right)=50 \%$$

1. $F(30)$.

$$F\left(30\right)=P\left(X\leq 30\right)=P\left(X\leq 20\right)+P\left(20\leq X\leq 30\right).$$

Da $P\left(20\leq X\leq 30\right)=P\left(µ\leq X\leq µ+2σ\right)$ og vi ved at sandsynligheden for at X ligger i intervallet $[µ-2σ;µ+2σ]$ er 95,45 % ifølge formelsamlingen s. 42 og at tæthedsfunktionen for normalfordelingen er symmetrisk omkring sit maksimum. Så må $P\left(µ\leq X\leq µ+2σ\right)=\frac{P\left(µ-2σ\leq X\leq µ+2σ\right)}{2}=\frac{95,45\%}{2}=47,725\%$

$$F\left(30\right)=50\%+47,725\%=97,725\%$$

**Opgave 2:**

En stokastisk variabel $X$ er normalfordelt $X∼N\left(5,3\right)$.

1. Bestem intervallerne for de exceptionelle udfald for $X$.

Ifølge formelsamlingen s. 42 gælder at de exceptionelle udfald ligger i intervallerne $]-\infty ;µ-3σ]$ og $[µ+3σ;\infty [$. I den konkrete opgave aflæses µ=5 og $σ=3$ og vi kan derfor opstille intervallerne for de exceptionelle udfald

$]-\infty ;-4]$ og $[14;\infty [$

1. Bestem intervallet for de normale udfald for $X$.

Ifølge formelsamlingen s. 42 gælder at de normale udfald ligger i intervallet $[µ-2σ ;µ+2σ$I den konkrete opgave gælder derfor at de normale udfald ligger i udfaldet

$[-1;11]$

1. Bestem $P(X\leq 2)$.

Det ses at $µ-σ=5-3=2$

Så

$$P\left(X\leq 2\right)=P\left(X\leq µ-σ\right)=P\left(X\leq µ\right)-P\left(µ-σ\leq X\leq µ\right)=0,5-0,33135=0,16865$$

**Opgave 3:**

På figuren nedenfor ses grafen for funktionen $f$. Funktionen er tæthedsfunktion for en stokastisk variabel $X$. Det oplyses, at

$$P\left(X\leq 125\right)=0,7, P\left(X\geq 50\right)=0,82, og P\left(175\leq X\right)=0.09$$

Bestem arealet af hvert af områderne $A\_{1}, A\_{2}, A\_{3}$ og $A\_{4}$.



Vi ved at sandsynlighederne for en kontinuert stokastisk $X$ er givet ved arealet under tæthedsfunktionen vi oversætter der sandsynlighederne til arealer

$$P\left(X\leq 125\right)=0,7=A\_{1}+A\_{2}$$

$$P\left(X\geq 50\right)=0,82=A\_{2}+A\_{3}+A\_{4}$$

$$P\left(175\leq X\right)=0,09=A\_{4}$$

Vi ved at summen af sandsynlighederne skal være lig 1 og dermed summen af arealerne

$$A\_{1}+A\_{2}+A\_{3}+A\_{4}=1$$

Vi indsætter $0,7=A\_{1}+A\_{2}$ og $0,09=A\_{4}$ i den sidste ligning og isolere $A\_{3}$

$$0,7+A\_{3}+0,09=1$$

$$A\_{3}=0,21$$

Dernæst bestemmes $A\_{2}$ i $0,82=A\_{2}+A\_{3}+A\_{4}$

$$0,82=A\_{2}+0,21+0,09$$

$$A\_{2}=0,52$$

Dernæst bestemmes $A\_{1}$ i $0,7=A\_{1}+A\_{2}$

$$0,7=A\_{1}+0.52$$

$$A\_{1}=0,18$$

Tjek for om vi har regnet rigtig

$$A\_{1}+A\_{2}+A\_{3}+A\_{4}=0,18+0,52+0,21+0,09=1$$